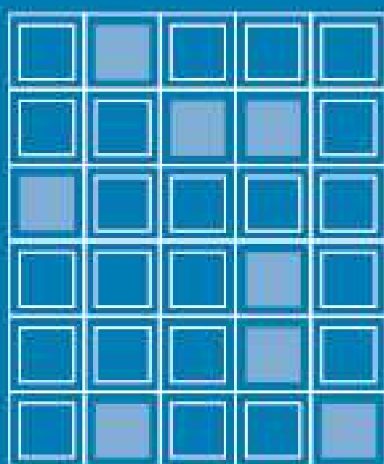
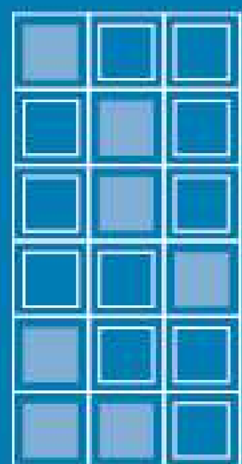


Educación General Básica - Subnivel Superior



MATEMÁTICA





9.º Grado
TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

MINISTERIO
DE **EDUCACIÓN**





EL
GOBIERNO
DE TODOS



Matemática





TEXTO DEL ESTUDIANTE



PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Lenín Moreno Garcés

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Fander Falconí Benítez

Viceministro de Educación
Álvaro Sáenz Andrade

Viceministra de Gestión Educativa
Mónica Reinoso Paredes

Subsecretaria de Fundamentos Educativos
Ruthy Intriago Armijos

Subsecretaria de Administración Escolar
Mónica García Echeverría

Directora Nacional de Currículo
María Cristina Espinosa Salas

Director Nacional de Operaciones y Logística
Germán Lynch Álvarez

Primera impresión: agosto 2016
Quinta impresión: junio 2018
Impreso por: Medios Públicos EP


PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

Dirección de contenidos editoriales Ecuador
María Alexandra Prócel Alarcón

Creación de contenidos
Jefferson Humberto Domínguez Estévez

Conceptualización del proyecto para el área
Luis Humberto Buitrón Aguas

Diseño y diagramación
David Rojas

Corrección de estilo
Yolanda Castillo

Imagen de la portada
SM Ediciones Ecuador

Fotografía
Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones Colombia, Shutterstock

Ilustración
Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Este texto fue revisado por la Universidad Politécnica Salesiana y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 8 de junio de 2016.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN







Promovemos la conciencia ambiental en la comunidad educativa.
Hemos impreso el 8% de ejemplares con certificado de responsabilidad ambiental.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

2018: El valor del respeto

El inicio de un nuevo año escolar siempre nos produce ilusión. Todos los niños, niñas y adolescentes se preparan, no solo para estudiar y aprender, sino también para encontrarse con sus compañeros de aula. A veces nos topamos con caras nuevas en la clase, y eso es una buena señal, porque vemos que otros estudiantes se están integrando a nuestra institución educativa. Eso significa también que es una buena oportunidad para relacionarnos con personas distintas de las que ya conocíamos y así lograr nuevas amistades.

Sabemos que la escuela es un buen lugar para crecer y compartir muchas cosas positivas, y de vez en cuando también para enfrentar problemas. Ser solidarios y apoyar a quienes necesitan ayuda es un consejo que deberíamos seguir en la casa, la escuela y la comunidad.

El nuevo año escolar se abre como una experiencia que nos desafía y al mismo tiempo nos gratifica. Somos parte de la comunidad educativa, maestros, maestras, padres y madres de familia, representantes legales y parientes. Todos somos responsables de acompañarlos en el mejoramiento de su educación, en mejorar la calidad de sus conocimientos y en la experiencia de estudiar y aprender para crecer como mejores seres humanos y ciudadanos.

Un nuevo año escolar significa un trabajo dedicado a ampliar las relaciones positivas, a las que llamamos respeto. Nadie puede quedar fuera de esta práctica de todos los días en la escuela y la comunidad. Este valor de vida se opone radicalmente al desprecio y a la exclusión. Si queremos una educación justa, en la que todos podamos participar, el respeto hacia los otros significa aceptar sus propias formas de ser, sus características individuales, sociales, físicas y culturales; su manera de pensar y apreciar el mundo; sus costumbres y tradiciones; sus aptitudes y habilidades. Esta es la mejor propuesta que puede hacer el Ministerio de Educación al iniciar el nuevo año escolar.

El respeto hacia los demás significa el respeto a cada uno y cada una, a nosotros mismos. El respeto no acepta agresión alguna, ya sea física, sicológica o sexual. Implica reconocernos a nosotros mismos en las personas que nos rodean. Maestros y maestras, estudiantes y compañeras, somos todos seres humanos que tenemos los mismos derechos. Eso significa el derecho a tener nuestro propio punto de vista, el derecho a cambiar de opinión, a equivocarse, el derecho a crear un mundo propio en el cual vivir.

Este 2018 —año del respeto—, está inspirado en los principios de cero tolerancia al abuso y la violencia, a cualquier tipo de discriminación. Promovemos la equidad de género (igualdad entre hombres y mujeres), la justicia social, la solidaridad, la cultura de paz, la convivencia entre culturas y tradiciones diferentes, y el cuidado del ambiente. Todos estos son valores que debemos difundir y vivir a plenitud todos los días en la comunidad educativa.

Este es un año para defender con mucha decisión y compromiso los derechos de los estudiantes. Nuestro programa Más Unidos, Más Protegidos fue creado para prevenir la violencia dentro del sistema educativo. Vemos a la educación como un todo integrado; trabajamos para mejorar nuestro ambiente con importantes innovaciones curriculares como la metodología Tierra de Niñas, Niños y Jóvenes para el Buen Vivir. La incorporación de saberes ancestrales a la educación, el desarrollo de las artes, de la buena lectura, y una ambiciosa agenda digital forman parte de nuestra propuesta al iniciar el nuevo año escolar.

Esta es la acción integral que ahora promovemos, en la que niños, niñas y adolescentes participan como una fuerza decisiva dentro de toda la comunidad educativa. Sigamos caminando con buen paso y con respeto en este 2018.

Fander Falconí

Ministro de Educación

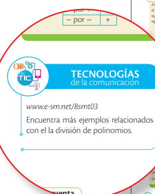
Conoce tu libro

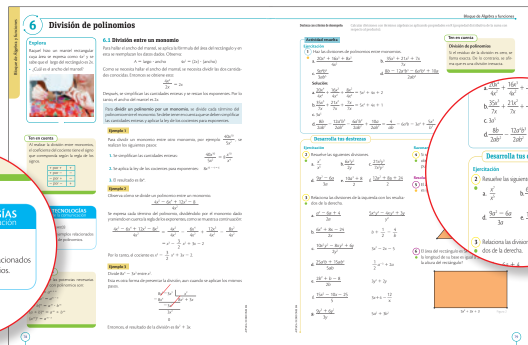
Libro de texto

El libro consta de seis unidades temáticas. Cada unidad desarrolla contenidos asociados a los bloques curriculares propuestos en el currículo nacional: álgebra y funciones, geometría y medida y estadistica y probabilidad. **Cada unidad consta de:**

Desarrollo del contenido

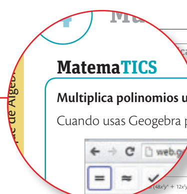
Tecnologías de la comunicación
Enlaces a sitios web que amplían los temas.

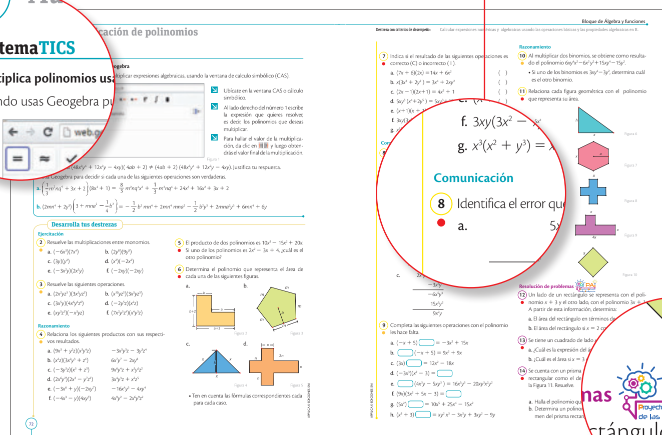




Desarrolla tus destrezas
Actividades clasificadas por destrezas para aplicar los contenidos estudiados.

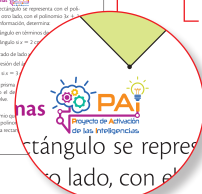
Las actividades también están clasificadas por nivel de complejidad.
- Básico
- Intermedio
- Avanzado





MatemaTICS
Presenta una herramienta informática que enriquece el quehacer matemático mediante el uso de la tecnología.

En los ejercicios desafiantes encontrarás el ícono PAI (Proyecto de Activación de las Inteligencias).



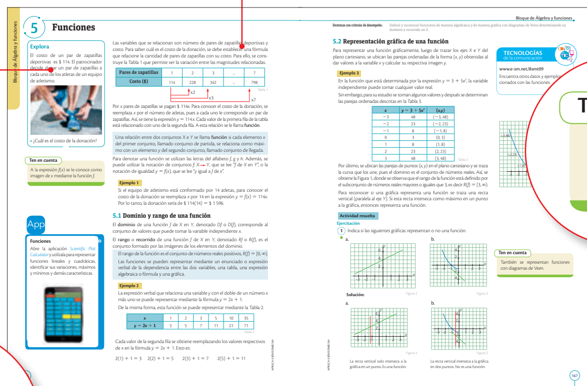
Desarrollo del contenido

Los temas siguen una ruta didáctica clara y secuencial que empieza con un texto (Explora) para captar tu atención e interés. Continúa con el desarrollo del tema, apoyado por ejemplos y actividades resueltas. Al finalizar cada tema podrás encontrar variados ejercicios en **Desarrolla tus destrezas**.

Ten en cuenta
Texto que activa los conocimientos previos o refuerza las explicaciones facilitando el aprendizaje.

Explora
Momento inicial que se sitúa en un contexto relacionado con el tema.

Contenido



App
Invita a descargar una app desde la Play Store de un dispositivo móvil para profundizar sobre los temas vistos.



ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

1 Números reales

BLOQUE

Álgebra
y funciones

En la antigüedad, los hombres estaban convencidos de que con los números racionales se podían explicar todos los fenómenos naturales. Nada más lejos de la realidad; por ejemplo, al medir la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm, aparecen números no racionales.

- Averigua qué situaciones permitieron descubrir números no racionales en la antigüedad.



Cultura del Buen Vivir

La honestidad

Una persona honesta se comporta y se expresa con sinceridad y coherencia, respetando los valores de la justicia y la verdad.

- ¿Crees que es importante ser honesto al contestar una encuesta que permite analizar los problemas de tu comunidad? ¿Por qué?

Aprenderás...

- Números racionales e irracionales
- Números reales. Operaciones
- Notación científica
- Potencias, raíces y logaritmos de números reales

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

Un número irracional en las encuestas

Cuando se hace una encuesta, se entrevista a una muestra de la población; las opiniones de las personas de la muestra permiten la aproximación a las del conjunto total de la población. Pero, para ello, es necesario que la selección de las personas entrevistadas se haga al azar, y una forma de hacerlo es utilizando el número irracional π (pi).

Para determinar la cantidad de personas que se deben entrevistar, se emplean unas tablas con números aleatorios. Una buena fuente para obtener este tipo de números son los decimales de π, porque forman lo que se denomina "una secuencia normal", en la que todos los números están igualmente representados y sin seguir ninguna secuencia o pauta determinada.

Hasta ahora no se ha encontrado una regularidad o modelo repetitivo en el orden de aparición de los primeros millones de decimales y se cree que no existe, aunque no se ha podido demostrar. Cada cifra, del 0 al 9, aparece aproximadamente el 10% de las veces y si se eligen de dos en dos (del 00 al 99), cada número representa el 1% del total.

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 9.

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué características debe tener una encuesta para que sea confiable? ¿De qué manera contribuye el uso del las cifras del número π en este tipo investigación estadística?
2. Según la lectura, una manera de formar un conjunto de números aleatorios es a través de los decimales del número π. ¿Cuál consideras que es la característica de estas cifras decimales que hace confiable esta selección?

Argumenta

3. Explica cómo aparecen las cifras decimales del número π y qué porcentaje representa cada cifra del total.
4. Busca algunos datos curiosos del número π, teniendo en cuenta los diferentes usos que pueden darse a sus cifras.

Propón

5. En la actualidad existen numerosas formas de obtener números aleatorios. Averigua tres de ellas y en cuáles campos del conocimiento se utilizan.
6. Investiga algunos de los récords que se tienen registrados con relación al número π y coméntalos con tus compañeros.

1 Números racionales

Explora

La Figura 1 está dividida en regiones con cuatro colores diferentes.

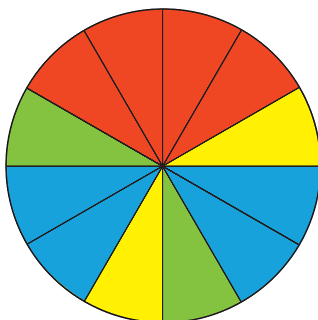


Figura 1

- ¿Cuáles colores ocupan la misma parte del círculo?

El círculo está dividido en doce regiones iguales, que están sombreadas con colores diferentes así:

- El color rojo ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color azul ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color amarillo ocupa dos regiones de la unidad.
- El color verde ocupa dos regiones de la unidad.

Por lo tanto, las regiones de color azul y rojo ocupan la misma parte del círculo y las regiones de color amarillo y verde ocupan también la misma cantidad.

1.1 Fracciones equivalentes

Al considerar el círculo de la Figura 1. como una unidad, se puede establecer que cada color ocupa una fracción de ella. En este caso, la distribución es:

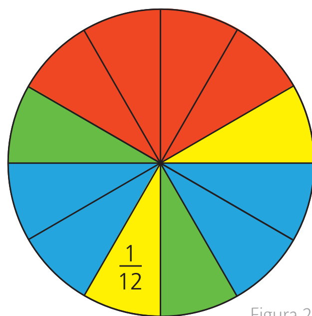


Figura 2

La región roja ocupa $\frac{1}{3}$ de la unidad.

La región azul ocupa $\frac{2}{6}$ de la unidad.

La región amarilla ocupa $\frac{1}{6}$ de la unidad.

La región verde ocupa $\frac{2}{12}$ de la unidad.

Además, se pueden establecer las siguientes comparaciones:

- Las regiones azul y roja ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.
- Las regiones amarilla y verde ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.

Las **fracciones equivalentes** son aquellas fracciones que representan la misma parte de una unidad.

Dada una fracción, se pueden obtener fracciones equivalentes a ella, ya sea por **amplificación** o por **simplificación**.

- Se amplifica una fracción cuando se multiplica tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.
- Se simplifica una fracción cuando se divide tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.

Ejemplo 1

Se pueden obtener fracciones equivalentes a $\frac{15}{60}$ de dos maneras.

Amplificación: $\frac{15}{60} \overset{\times 2}{=} \frac{30}{120} \overset{\times 3}{=} \frac{90}{360}$

Simplificación: $\frac{15}{60} \overset{\div 3}{=} \frac{5}{20} \overset{\div 5}{=} \frac{1}{4}$

Ten en cuenta

Si dos fracciones son equivalentes, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Extremo → $\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$ ← Medio
Medio → ← Extremo

$2 \cdot 15 = 6 \cdot 5$

Ten en cuenta

La Figura 3. representa la relación entre los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. A partir de ella, se pueden identificar las características de cada conjunto.

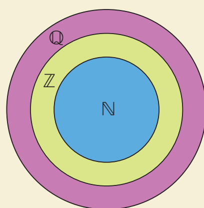


Figura 3

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.

1.2 Números racionales

El **conjunto de los números racionales** ($\mathbb{Q}$) es el conjunto de números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros con $b \neq 0$.

Ejemplo 2

Estos son ejemplos de números racionales: $3, \frac{6}{13}, -12, \frac{8}{5}, 2, 0, -\frac{4}{7}$.

1.3 Orden en los números racionales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se puede establecer una de estas relaciones:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Actividad resuelta

Comunicación

1. Establece cuál de estos números, $-\frac{3}{5}$ o $-\frac{7}{10}$, es mayor.

Solución:

Para comparar números racionales, se utilizan criterios similares a los utilizados para comparar fracciones. Observa:

$-\frac{3}{5} \qquad -\frac{7}{10}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$-\frac{6}{10} \qquad -\frac{7}{10}$ ← Se reducen al mínimo común denominador, es decir, se obtienen fracciones equivalentes cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los dos denominadores.

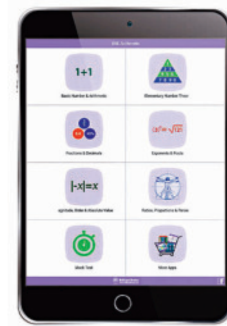
$-6 > -7$

$-\frac{6}{10} > -\frac{7}{10}$ ← Se comparan los numeradores y se obtiene la conclusión.



Números racionales

Abre la aplicación *GRE Math Arithmetic Review LE* y enfréntate a cada uno de los retos asociados con conjuntos numéricos, sus operaciones y relaciones.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Encuentra cuatro fracciones equivalentes en cada caso.

a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{4}{5}$ c. $\frac{30}{45}$

d. $-\frac{16}{20}$ e. $-\frac{9}{5}$ f. $-\frac{1}{4}$

Comunicación

3. Calcula, en cada caso, la fracción irreducible.

a. $\frac{30}{150}$ b. $\frac{28}{42}$ c. $\frac{18}{3}$

4. Explica qué diferencias hay entre números enteros y números racionales. Después, responde.

a. ¿Todos los enteros son racionales?

b. ¿Todos los números racionales son enteros?

c. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$?

d. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$?

Razonamiento

5. Escribe >, < o =, según corresponda.

a. $-2 \ \square \ \frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{9} \ \square \ \frac{-4}{9}$

c. $\frac{5}{4} \ \square \ \frac{4}{7}$ d. $\frac{7}{-6} \ \square \ \frac{6}{5}$

e. $\frac{5}{8} \ \square \ \frac{5}{7}$ f. $-\frac{6}{8} \ \square \ \frac{-3}{6}$

g. $\frac{-6}{12} \ \square \ \frac{4}{12}$ h. $0 \ \square \ \frac{4}{13}$

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

6. En un grupo de 100 personas, $\frac{2}{5}$ prefieren la música moderna; $\frac{3}{10}$, la música clásica y el resto, el jazz.

a. ¿Qué parte del grupo prefiere el jazz o la música clásica?

b. ¿Cuántas personas prefieren cada tipo de música?

2 Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional

Explora

La Figura 1 presenta el porcentaje de preferencias de tipos de deportes de un grupo de personas.

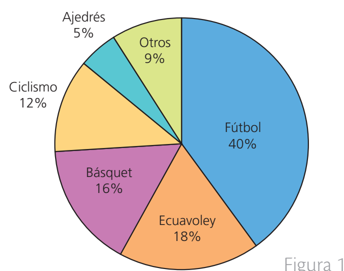


Figura 1

- ¿De qué otra manera se pueden representar estos porcentajes?

El porcentaje es un tipo de comparación entre dos cantidades: una indica la parte o un total y la otra corresponde al total o unidad. Entonces, todo porcentaje se puede escribir como una fracción. En las fracciones, el numerador corresponde al valor de la parte y el denominador es 100, ya que equivale al valor total de la unidad. (Tabla 1)

Tipo de deporte	Fútbol	Ecuavoley	Básquet	Ciclismo	Ajedrés	Otros
Porcentaje	40%	18%	16%	12%	5%	9%
Expresión fraccionaria	$\frac{40}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{9}{100}$

Tabla 1

Además, cada fracción se prodría escribir como un número decimal.

2.1 Expresión decimal de un número racional

Según la información de la Tabla 1, el valor 18% equivale a $\frac{18}{100}$ del total. Observa:

Porcentaje — Número racional — Expresión decimal

$$18\% = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

La **expresión decimal** equivale a la división del numerador entre el denominador.

Ejemplo 1

- La expresión decimal de los porcentajes de la Figura 1 se calcula así:

Expresión fraccionaria	$\frac{40}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{9}{100}$
Expresión decimal	0,4	0,18	0,16	0,12	0,05	0,09

Tabla 2

2.2 Clasificación de las expresiones decimales

De acuerdo con la estructura de las cifras decimales, la expresión decimal de un número racional puede ser **exacta**, **periódica pura** o **periódica mixta**.

Expresión decimal	Características	Ejemplo
Exacta	Tiene un número finito de cifras decimales. Equivale a una fracción decimal, es decir, una con denominador 10 o una potencia de 10.	$\frac{9}{2} = 4{,}5$
Periódica pura	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Ese grupo se llama periodo.	$\frac{10}{3} = 3{,}33 = 3{,}\widehat{3}$
Periódica mixta	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repite y un grupo de cifras que se repite indefinidamente. El grupo que no se repite se llama anteperiodo.	$\frac{25}{6} = 4{,}166 = 4{,}1\widehat{6}$

Tabla 3

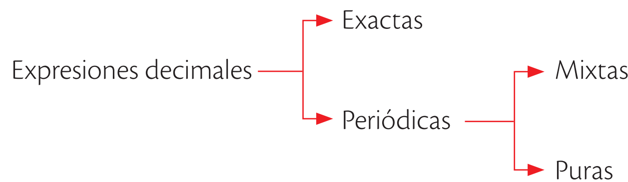
Ten en cuenta

Para conocer qué tipo de expresión decimal tiene un número fraccionario, basta con identificar los factores primos de su denominador así:

- Si solo tiene como factores el 2 o el 5, la expresión decimal es exacta.
- Si contiene factores distintos de 2 y 5, la expresión es periódica pura.
- Si, además del 2 o del 5, tiene otros factores, la expresión es periódica mixta.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

La clasificación de las expresiones decimales de los números racionales se puede resumir de la siguiente manera:

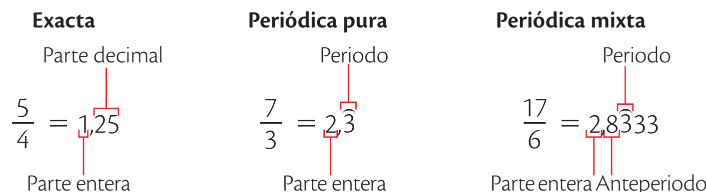


Ejemplo 2

Al calcular la expresión decimal de los números $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{17}{6}$, se encuentra esto:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots \qquad \frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots$$

De lo anterior, se deduce que las expresiones decimales son:



2.3 Fracción generatriz de un número racional

Todo decimal exacto, periódico puro y periódico mixto tiene una representación fraccionaria llamada **fracción generatriz.**

Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

La fracción generatriz de una expresión decimal exacta es aquella cuyo numerador es igual a la parte entera seguida por la parte decimal (sin la coma) y el denominador es una potencia de 10, con tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

Ejemplo 3

La fracción generatriz de 4,3567 se puede conseguir así:

$$4{,}3567 = 4{,}3567 \cdot \frac{10\,000}{10\,000} = \frac{43\,567}{10\,000}$$

Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura con parte entera nula tiene por numerador el periodo y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 4

La expresión decimal 13,735 735 735 735 735… es periódica pura y su periodo tiene tres cifras. Para encontrar su fracción generatriz, se puede proceder así:

$$13 + \frac{735}{999} = \frac{4\,574}{999}$$

Tantos nueves como cifras tenga el periodo

Ten en cuenta

La fracción generatriz de un número decimal exacto se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{\text{Número sin coma}}{10\ldots0}$$

Tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

La fracción generatriz de un número decimal periódico puro se halla así:

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{periodo}}{9\ldots9}$$

Tantos nueves como cifras tenga el periodo.

2 Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional

Ten en cuenta

La fracción generatriz de un número decimal periódico mixto es:

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{Anteperiodo periodo} - \text{Anteperiodo}}{9...9\ 0...0}$$

9...9: Tantos nueves como cifras tenga el periodo.

0...0: Tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

La fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta con parte entera nula tiene por numerador un número formado por el anteperiodo seguido del periodo, menos el anteperiodo; tiene por denominador un número con tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 5

La fracción generatriz de la expresión decimal 5,345 222 222… se calcula así:

$$5 + \frac{3\,452 - 345}{9\,000} = 5 + \frac{3\,107}{9\,000} = \frac{48\,107}{9\,000}$$

Actividad resuelta

Comunicación

1 Calcula la generatriz de las expresiones decimales 0,45; 2,151 5… y 3,822…

Solución:

- 0,45 es una expresión decimal exacta, entonces: $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.
- 2,15 es una expresión decimal periódica pura; por lo tanto:

$$2{,}151515... = 2 + 0{,}151515... = 2 + \frac{15}{99} = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$$

- 3,822… es una expresión decimal periódica mixta, luego:

$$3{,}8222 = 3 + 0{,}82222... = 3 + \frac{82 - 8}{90} = 3 + \frac{74}{90} = \frac{172}{45}$$

MatemaTICS

Convierte los resultados de decimal a fracción

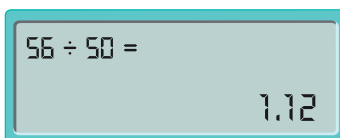
Las calculadoras científicas tienen una función que permite convertir un resultado decimal en fracción y viceversa, utilizando la tecla F↔D.

- Cuando el resultado se da en fraccionario, esta función da la salida de la expresión como el número decimal correspondiente.

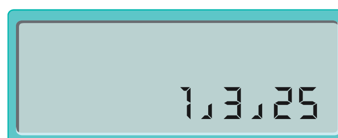
Por ejemplo, se efectúa la operación 56 ÷ 50. Así:

5 6 ÷ 5 0 EXE

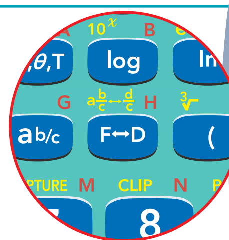
Entonces, se observa en la pantalla esto:



Al oprimir la tecla F↔D, la calculadora muestra la siguiente expresión:



Al oprimir nuevamente la tecla F↔D, la calculadora muestra la cantidad 1,12.





Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la expresión decimal que le corresponde a cada una de las siguientes fracciones.

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{7}{4}$ c. $\frac{2}{9}$

d. $\frac{23}{5}$ e. $\frac{65}{4}$ f. $\frac{42}{4}$

g. $\frac{13}{6}$ h. $\frac{92}{51}$ i. $\frac{15}{7}$

3 Completa la Tabla 4.

Expresión decimal	0,57		$3,\overset{\frown}{25}$		$4,3\overset{\frown}{6}$
Expresión fraccionaria		$\frac{3}{7}$		$\frac{9}{20}$	

Tabla 4

4 Halla la fracción generatriz de cada número decimal.

a. $5,\overset{\frown}{3}$ b. $0,12\overset{\frown}{5}$ c. 7,05

d. $0,7\overset{\frown}{4}$ e. $4,0\overset{\frown}{6}$ f. $3,1\overset{\frown}{23}$

g. $83,\overset{\frown}{2}$ h. 23,5 i. $84,\overset{\frown}{26}$

j. $90,\overset{\frown}{351}$ k. $5,3\overset{\frown}{8}$ l. $0,42\overset{\frown}{32}$

m. $0,3\overset{\frown}{5}$ n. $6,\overset{\frown}{11}$ ñ. $235,4\overset{\frown}{2}$

Razonamiento

5 Halla la expresión decimal de los números que están en las casillas y colorea según la clave dada.

$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{23}{6}$
$\frac{13}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{72}{7}$
$\frac{43}{6}$	$\frac{25}{9}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{5}{8}$

Tabla 5

- Colorea de azul las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea exacta.
- Colorea de verde las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica pura.
- Colorea de rojo las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica mixta.

Comunicación

6 Escribe cada número fraccionario en forma de número decimal. Explica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, cuál es la parte entera, el anteperiodo y el periodo de cada caso.

a. $\frac{12}{9}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $\frac{17}{6}$

d. $\frac{5}{7}$ e. $\frac{9}{8}$ f. $\frac{1}{33}$

7 Sin hacer la división, explica qué tipo de expresión decimal corresponde a cada fracción.

a. $\frac{177}{45}$ b. $\frac{34}{7}$ c. $\frac{93}{2}$

d. $\frac{127}{12}$ e. $\frac{59}{20}$ f. $\frac{29}{77}$

8 Rodea la o las afirmaciones que son verdaderas.

a. Un número racional se puede representar con muchas expresiones fraccionarias.

b. Todo número entero es racional periódico.

c. Los números racionales forman el conjunto de todos los números con infinitas cifras decimales.

d. Toda fracción se puede escribir como un decimal.

Resolución de problemas

9 El agua es un elemento escaso en la Tierra, sobre todo la que se utiliza para satisfacer las necesidades diarias.

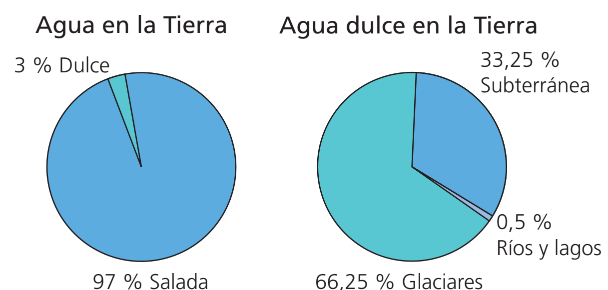


Figura 2

- De cada 100 litros de agua, ¿qué parte se encuentra en ríos y lagos?

10 En un grupo de 150 personas, $\frac{2}{5}$ prefieren ir de vacaciones a la playa; $\frac{1}{5}$, a la sierra y el resto prefieren quedarse en casa.

a. ¿Qué parte del grupo prefiere quedarse en casa?

b. ¿Cuántas personas prefieren cada opción para sus vacaciones?

11 Marina quiere saber si existen dos números enteros cuyo cociente sea 7,41411411. Ayúdala a averiguarlo y justifica.

3 Números racionales en la recta numérica

Explora

En un tornillo, se llama "paso" a la distancia entre los filamentos. En la Figura 1, el paso del tornillo es $\frac{1}{4}$ cm.

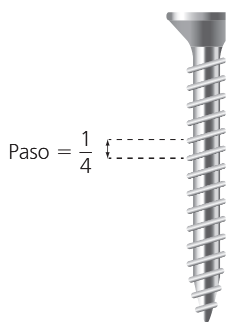


Figura 1

- Si por cada vuelta que se le da al tornillo su avance es igual a un paso, ¿cuántas vueltas se necesitan para que el tornillo se enrosque totalmente? ¿Que distancia alcanza a penetrar el tornillo en dos vueltas?

Ten en cuenta

Para poder representar los números racionales en la recta numérica, se debe ubicar un punto origen, 0, y un punto para designar la unidad 1. A partir de esta unidad se construyen los números enteros, replicando esta distancia hacia la derecha para los positivos o hacia la izquierda para los negativos.

El tornillo tiene cuatro pasos, por cada vuelta avanza un paso; por lo tanto, el tornillo necesita cuatro vueltas para quedar completamente enroscado. En este caso, cada vuelta corresponde a un cuarto del tornillo.

La representación gráfica de las vueltas o pasos se puede mostrar sobre una recta numérica. En esta, a cada número racional le corresponde un punto de la recta. Entonces, se divide la unidad en cuatro partes y se señala una por cada vuelta que da el tornillo.

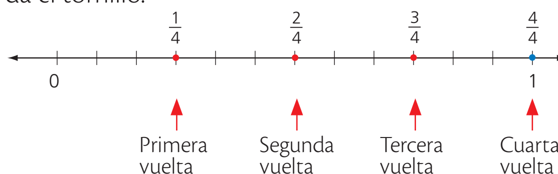


Figura 2

Para **representar un racional en la recta numérica**, se dividen las unidades en tantas partes como indica el denominador y se toman tantas como indica el numerador. Los racionales negativos toman las partes hacia el lado izquierdo del cero.

Ejemplo 1

Representa el racional $-\frac{7}{8}$ en la recta numérica.

El procedimiento descrito para representar el racional $-\frac{7}{8}$ consiste en dividir la unidad en ocho partes iguales como lo indica el denominar. Luego, se toman siete de estas partes. Como el racional es negativo, las partes se deben tomar hacia la izquierda del número 0.

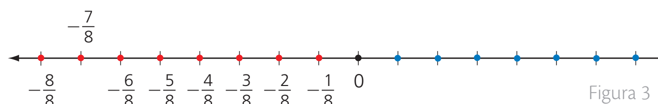


Figura 3

No siempre es fácil dividir la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador; por eso, en ocasiones, la representación de un racional utiliza el **teorema de Tales**.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Representa en la recta numérica el racional $\frac{4}{5}$.

Solución:

El procedimiento para representar gráficamente el racional $\frac{4}{5}$ es el siguiente.

0, 1 — Figura 4	0, 1 — Figura 5	0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, 1 — Figura 6
Se ubica en la recta el cero y la unidad. Luego, se traza una recta que pase por el punto cero (0) como se muestra en la Figura 4.	Sobre esta recta se identifica un segmento base. La medida de este segmento se debe replicar tantas veces como lo indique el denominador, como se ve en la Figura 5.	Se une el segmento final con el número 1 y se trazan las líneas paralelas a esta línea. De esta manera, la unidad, que está ubicada en la recta numérica, queda dividida en tantas partes como lo indica el denominador. Observa la Figura 6.

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa en la recta numérica los números $\frac{7}{4}$ y $\frac{3}{6}$.

3 Representar gráficamente los racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ en la recta numérica.

Razonamiento

4 La fracción $\frac{6}{5}$ es una fracción impropia y se puede expresar como un entero y una fracción propia, 1 y $\frac{1}{5}$, o como una fracción mixta, es decir $1\frac{1}{5}$. Expresa los siguientes racionales en forma de entero y fracción propia y grafica en la recta numérica.

a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{6}{4}$ c. $\frac{8}{7}$ d. $\frac{10}{3}$ e. $\frac{8}{6}$ f. $\frac{5}{2}$

Ejercitación

5 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes racionales, escritos en forma decimal.

a. 1,5 b. 1,2 c. $0,\widehat{3}$ d. $1,\widehat{25}$ e. −2,5

6 Escribe en forma decimal y fraccionaria los siguientes porcentajes.

a. 35% b. 80% c. 50% d. 100% e. 10%

7 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes porcentajes.

a. 20% b. 75% c. 50% d. 100% e. 10%

8 Representa en la recta numérica, los racionales representados en las siguientes figuras.

a.



Figura 7

b.

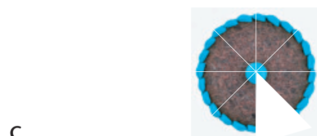


Figura 8

c.

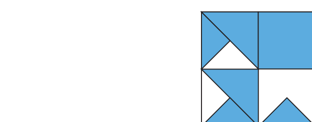


Figura 9

9 Indica el número racional que representan los puntos indicados en cada figura.

a.

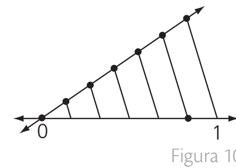


Figura 10

b.

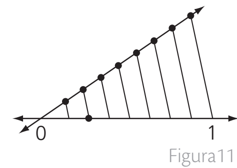


Figura11

c.

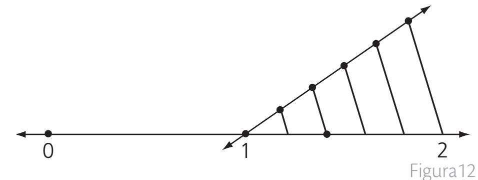


Figura12

d.

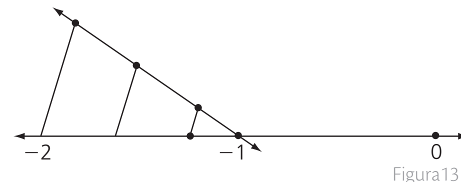


Figura13

10 En la recta numérica grafica y establece el orden de cada grupo de números.

a. −1; 2,5; 1,33; 6,7

b. $\frac{4}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{3}$

c. 0,725; $\frac{5}{2}$; −2,34; 1,45; $\frac{4}{3}$

Resolución de problemas



11 A una fiesta de números racionales, asistieron los siguientes:

$\frac{49}{90}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{11}{20}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{541}{990}$

Se quisieron ordenar de mayor a menor. A uno se le ocurrió que para ello podrían vestirse de números decimales, pero algunos de ellos no habían traído el traje.

a. ¿Cómo quedaron ordenados?

b. Entraron a la fiesta cuatro "colegas" y cada uno de ellos se situó entre dos de los otros. Se vistieron para ello de decimales, uno de exacto, otro de periódico puro, otro de periódico mixto y, el último, de irracional. ¿Qué posibles "colegas" encajarían con esas condiciones? Menciónalos y justifica con una gráfica



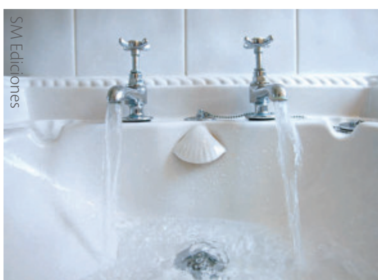
Figura14

4 Operaciones con números racionales

Explora

Una bañera se puede llenar por medio de dos llaves: la llave *A* la llena en 30 minutos y la llave *B* la llena en 20 minutos.

- ¿En cuánto tiempo se llenará la bañera si se abren las dos llaves al mismo tiempo?



La velocidad con la que se llena la bañera con la llave *A* se puede escribir como un número racional $\frac{1}{30}$. Igualmente, la velocidad de la llave *B* corresponde al racional $\frac{1}{20}$. Para calcular la velocidad con la que se llena el tanque al abrir las dos llaves, se deben adicionar las dos velocidades, es decir: $\frac{1}{30} + \frac{1}{20}$. Entonces:

Se calcula el m.c.m. de los denominadores	m.c.m. $(30, 20) = 60$.
Se buscan las fracciones equivalentes a $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{20}$, con denominador 60.	Son: $\frac{2}{60}$ y $\frac{3}{60}$.
Se adicionan las fracciones obtenidas y, si es posible, se simplifica el resultado.	$\frac{2}{60} + \frac{3}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

Como la suma de las dos velocidades es $\frac{5}{60}$, se concluye que las dos llaves llenan cinco bañeras en 60 minutos y que las dos llaves llenan una bañera en 12 minutos ($\frac{1}{12}$).

Para resolver ciertas situaciones, es necesario aplicar **operaciones entre racionales,** tales como la adición, la sustracción, la división, la multiplicación y la potenciación.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con b y $d \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces las operaciones con números reales se pueden definir como se muestra a continuación.

Adición	
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$
Sustracción	
$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$
Multiplicación y división	
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Potenciación y radicación			
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$	$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}}$	

Ten en cuenta

Las propiedades de las potencias para números enteros se aplican también en los números racionales. Observa.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots \times a$

$a^0 = 1$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \times b^m = (a \cdot b)^m$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve estas operaciones: $\frac{3}{13} + \frac{-14}{13}$, $\sqrt[4]{\frac{6}{15}}$, $\frac{-25}{32} \times \frac{12}{20}$ y $\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

Solución:

a. $\frac{3}{13} + \frac{-14}{13} = \frac{3 + (-14)}{13} = \frac{-11}{13}$

b. $\sqrt[4]{\frac{6}{15}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{15}}$

c. $\frac{-25}{32} \times \frac{12}{20} = \frac{(-25) \cdot (12)}{(32) \cdot (20)} = \frac{-300}{640} = \frac{-15}{32}$

d. $\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las operaciones indicadas.

a. $\frac{-2}{11} + \frac{-9}{11}$ b. $\frac{17}{5} + \frac{-19}{5}$ c. $\frac{-4}{6} + \frac{7}{8}$

d. $\frac{-5}{8} - \frac{11}{20}$ e. $\frac{9}{15} - \frac{-7}{12}$ f. $\frac{7}{5} \times \frac{-8}{6}$

g. $\frac{13}{6} \times \frac{4}{11}$ h. $\frac{-10}{8} \times \frac{-12}{20}$ i. $\frac{15}{16} \times \frac{-20}{5}$

j. $\frac{20}{12} \div \frac{25}{30}$ k. $\frac{\frac{-25}{32}}{\frac{10}{16}}$ l. $\frac{\frac{-2}{9}}{\frac{8}{6}}$

m. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ n. $\frac{9^8}{9^6}$ ñ. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Razonamiento

3 Completa los espacios con el signo que hace falta (+, −, ×, ÷) para que cada igualdad sea cierta.

a. $\frac{5}{3} \square \frac{3}{7} = \frac{44}{21}$ b. $\frac{6}{7} \square \frac{4}{5} = \frac{30}{28}$

Ejercitación

4 Resuelve paso a paso las operaciones de cada paréntesis.

a. $\left(\frac{7}{8} + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{9}{20} + \frac{-5}{2}\right)$ b. $\left(\frac{-8}{15} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{-9}{6} - \frac{-7}{10}\right)$

c. $\left(\frac{-3}{2} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right)$ d. $\left(\frac{-6}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{4}{3}\right)$

e. $\left(\frac{-9}{4} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{4}{2}\right)$ f. $\left(\frac{-2}{5} \div \frac{6}{7}\right) - \left(\frac{4}{3} \div \frac{1}{8}\right)$

g. $\left(\frac{-8}{5} + \frac{2}{4}\right) \div \left(\frac{6}{10} - \frac{5}{2}\right)$ h. $\left(\frac{-8}{7} - \frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{4}{15} + \frac{-2}{3}\right)$

Razonamiento

5 Completa la siguiente tabla.

$\frac{3}{7}$	+	$\frac{\square}{\square}$	=	$-\frac{6}{6}$
$\frac{\square}{\square}$	−	$\frac{7}{5}$	=	$\frac{2}{20}$
$\frac{9}{2}$	×	$\frac{\square}{\square}$	=	$\frac{27}{14}$
$\frac{\square}{\square}$	÷	$\frac{11}{5}$	=	$-\frac{20}{22}$
$\frac{5}{\square}$	+	$\frac{\square}{7}$	=	$\frac{5}{14}$
$\frac{-8}{\square}$	−	$\frac{9}{\square}$	=	$-\frac{93}{30}$

6 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\frac{\frac{-4}{6} + \frac{7}{8}}{\frac{-5}{8} - \frac{11}{20}}$ b. $\frac{\frac{9}{15} - \frac{-7}{12}}{\frac{-6}{2} + \frac{-8}{3}}$

c. $\frac{\frac{-4}{10} \times \frac{-3}{2}}{\frac{6}{8} \times \frac{4}{5}}$ d. $\frac{\frac{15}{6} \div \frac{-7}{2}}{\frac{-2}{5} \div \frac{6}{7}}$

Resolución de problemas



7 Para la celebración de una victoria de la selección Ecuatoriana, en una panadería prepararon un pastel. Vendieron $\frac{1}{3}$ de pastel y obsequiaron $\frac{1}{5}$. ¿Qué cantidad del pastel les quedó?

8 Un pintor recibe $35\frac{2}{7}$ litros de pintura azul para decorar la fachada de una casa. El pintor gastó $23\frac{1}{7}$ litros para terminar el trabajo ¿Cuánta pintura ahorró?

9 El recorrido de una etapa de una vuelta ciclística tiene una longitud de 213 km y un ciclista recorre $\frac{2}{3}$ del trayecto en cinco horas.

- ¿Cuántos kilómetros le faltan para acabar la etapa?
- Si continúa con el mismo promedio de velocidad, ¿cuánto tiempo le falta para terminar la etapa?



10 Un ciclista ha recorrido $1375\frac{1}{4}$ metros en una bicicleta cuya rueda mide $2\frac{1}{3}$ metros de circunferencia. ¿Cuántas vueltas ha dado la rueda?

5 Números irracionales

Explora

Al solucionar o simplificar algunas expresiones matemáticas, se obtienen números con características particulares y curiosas como es el caso del número pi (π).

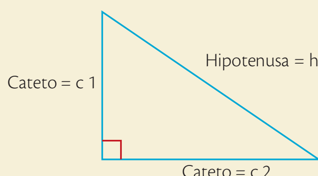
Ten en cuenta

El "número áureo" es la relación que existe entre dos segmentos *a* y *b*, según la siguiente proporción: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Esta relación se puede expresar de esta manera: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A este número lo encontramos, por ejemplo, en la disposición de los pétalos de las flores, en la distribución de los tallos de los árboles, en las espirales y en las conchas de caracoles.



Ten en cuenta

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado mayor se denomina hipotenusa.



Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Esto es: $h^2 = c1^2 + C2^2$

El número π es un número que se expresa como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, así: $\pi = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Diámetro}}$.

Este número no se puede expresar como una razón entre dos números enteros y su expresión decimal es infinita no periódica. Por lo tanto, π no es un número racional.

Una forma de hallar un valor aproximado de π es mediante el siguiente procedimiento:

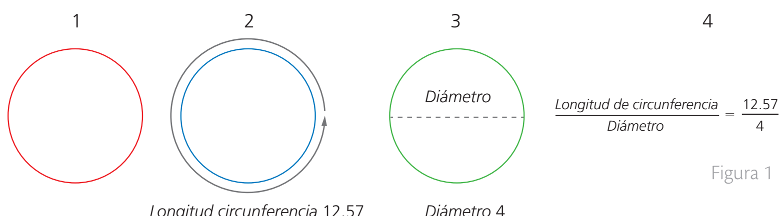


Figura 1

- Se traza un círculo y se toma la medida de longitud de la circunferencia por medio de una cuerda, que luego se debe medir con una regla.
- Se toma la medida del diámetro procurando que sea lo más exacto posible.
- Se divide la longitud de la circunferencia ente el diámetro; para ello se puede usar una calculadora. El valor obtenido es un valor aproximado al valor real de π.

Los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como razones entre números enteros y tienen como característica que su expresión decimal es infinita no periódica. Este conjunto se representa con el símbolo $\mathbb{I}$.

En el conjunto de los números irracionales encontramos todas las raíces que no son exactas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, etc. Además, entre los números irracionales encontramos números especiales como π, φ (número áureo) o e (número de Euler).

5.1 Números irracionales en la recta numérica

A cada número irracional le corresponde un punto en la recta. Por ejemplo, se pueden graficar los números que son raíces utilizando el teorema de Pitágoras.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Representa el número irracional $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

Solución:

- Se construye un cuadrado de lado 1 sobre la recta numérica, entre el número 0 y el 1, y se obtiene la diagonal $d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (Figura 2).
- Se hace un arco con centro en 0 y radio igual a la diagonal (Figura 3),
- El arco corta a la recta en dos puntos. La distancia de estos al punto 0 es $\sqrt{2}$. Luego, a la derecha de cero se encuentra el punto $\sqrt{2}$ (Figura 4).

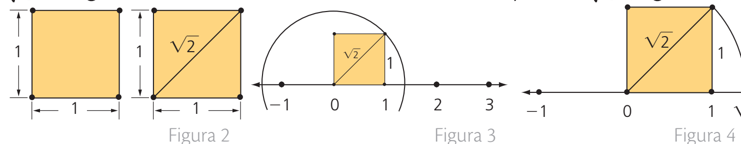


Figura 2 Figura 3 Figura 4

- Este procedimiento se puede aplicar como se ve en las figuras 5, 6, 7 y 8 para representar los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$, entre otros.

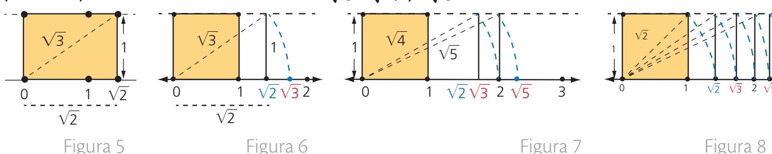


Figura 5 Figura 6 Figura 7 Figura 8

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos.
Establecer relaciones de orden en un conjunto de números irracionales utilizando la recta numérica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla las medidas de los catetos o las hipotenusas que hacen falta en cada uno de los triángulos rectángulos.

a.

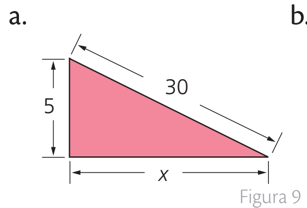


Figura 9

b.

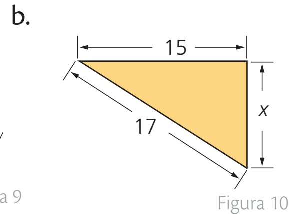


Figura 10

c.

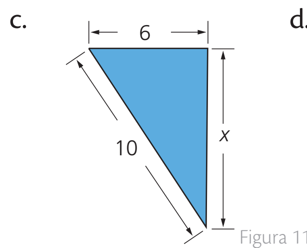


Figura 11

d.

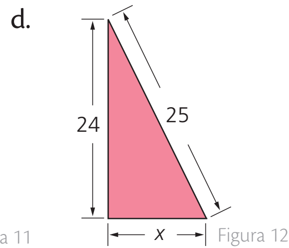


Figura 12

3 Para el siguiente triángulo rectángulo, con vértices *A*, *B*, *C* y lados *a*, *b*, *c* (Figura 13), halla el valor del lado que hace falta en cada caso usando el teorema de Pitágoras.

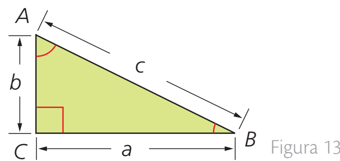


Figura 13

a. $a = 12, b = 9, c = \square$ b. $a = 11, b = \square, c = 17$

c. $a = \square, b = 8, c = 9$ d. $a = \square, b = 60, c = 61$

e. $a = 9, b = \square, c = 41$ f. $a = 23, b = 17, c = \square$

Ejercitación

4 Completa la tabla, a partir de la siguiente información.

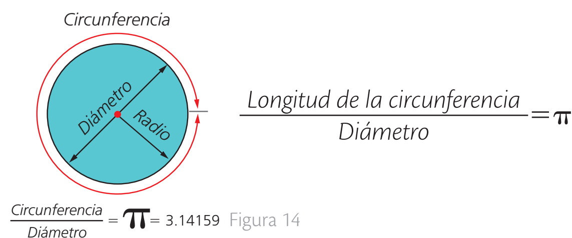


Figura 14

Longitud de circunferencia	Diámetro
6π	
	26
81,681 4	
	3.182 4
$\frac{4}{5}\pi$	
	$\frac{3}{8}$

Razonamiento

5 Una forma de aproximarse al valor del número áureo es por medio de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es la siguiente: 1, 1, 2, 3… aquí, un número cualesquiera de la serie es la suma de los dos anteriores. Halla los primeros diez términos de la sucesión de Fibonacci.

6 Si tomamos dos valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci y calculamos la razón que hay entre ellos, el resultado va a ser una aproximación al valor del número áureo; entre más grandes sean los números, más aproximado será el cálculo. Halla una aproximación decimal del número áureo.

7 Realiza la construcción que se ve en la Figura 15, en hojas cuadriculadas.

Comunicación

8 Establece cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales. Explica por qué.

$\sqrt{8}$; $0,\widehat{123}$; -1234; 12,35; $\sqrt{9}$; $\sqrt{12}$; $\frac{\sqrt{8}}{7}$; $1+\sqrt{15}$

9 Ubica en la recta los siguientes números.

a. $\sqrt{7}$ b. $-\sqrt{5}$ c. $\sqrt{8}$ d. $\sqrt{6}$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

10 El diámetro de una rueda de una bicicleta de ciclomontañismo es de 0,8 m. ¿Cuántas vueltas ha dado una de las ruedas si el deportista ha recorrido 6 km?

11 Sabiendo que una aproximación decimal al número áureo es $\varphi = 1{,}618\ 033$, toma billetes de diferentes denominaciones y verifica si sus dimensiones de largo y ancho, se encuentran en proporción áurea. Luego, encuentra cinco objetos rectangulares que se encuentren en proporción áurea.



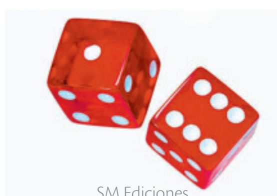
Tomado de: http://usacertifiedaccountants.com

6 Números reales

Explora

Los números reales permiten establecer mediciones relacionadas con los conceptos de longitud, área y volumen de figuras cuyas dimensiones pertenecen tanto al conjunto de los números racionales como de los irracionales.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado?



- Halla el área superficial de una esfera de 5 cm radio.



Para calcular el área del cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado, se aplican las operaciones entre números racionales así: $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}. = 0{,}64$ cm^2.

De otra parte, el cálculo del área superficial de una esfera está dada por la formula $4\pi r^2$ y, considerando que π es un número irracional, se tiene que el resultado $4\pi\,(5\text{m})^2 = 314{,}159265$ m^2 también es un número irracional.

Entonces, tanto 0,64 como 314,159265 pertenecen al conjunto de los números reales.

El **conjunto de los números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por todos los números racionales e irracionales. Es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Además, a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica.

Ejemplo 1

Los números reales pueden ser:

- Números naturales como 4, 6, 8.
- Números enteros como -5, -10, 0.
- Números racionales como $\frac{-3}{5}$ y $3{,}47\overset{\frown}{89}$.
- Números irracionales como $\sqrt{2}$, π y φ.

6.1 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real es la distancia del número hasta el 0. Se escribe como $|a|$ y su resultado siempre es un número positivo.

Entonces, si $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \begin{cases} -a \text{ si } a \leq 0 \\ a \text{ si } a \geq 0 \end{cases}$.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla el valor absoluto de los números φ; $-256{,}245\overset{\frown}{37}$; π; $-\frac{8}{9}$.

Solución:

Para hallar el valor absoluto de estos números, se tiene en cuenta la definición de valor absoluto. Esta es:

- Cuando el número es positivo, el valor absoluto es el número. Así: $|\varphi| = \varphi$, $|\pi| = \pi$
- Cuando el número es negativo, su valor absoluto es el número sin el signo. Así: $|-256{,}245\overset{\frown}{37}| = 256{,}245\overset{\frown}{37}$; $\left|-\frac{8}{9}\right| = \frac{8}{9}$

Solución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

2 Halla la distancia que hay entre los números -50 y 27; -89 y -37.

Solución:

La distancia entre dos números se calcula como el valor absoluto de la diferencia de los números. De este modo: $d(a, b) = |a - b| = |b - a|$.

Si $a = -50$ y $b = 27$: $d(-50, 27) = |-50 - 27| = 77$ (Figura 1).

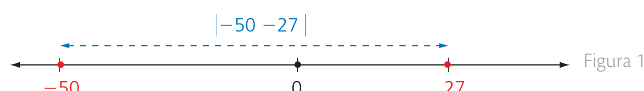


Figura 1

Si $a = -89$ y $b = -37$: $d(-89, -37) = |-89 -(-27)| = 62$ (Figura 2).

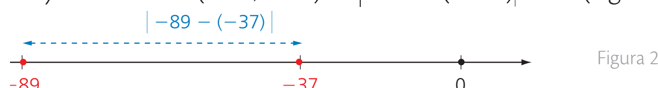
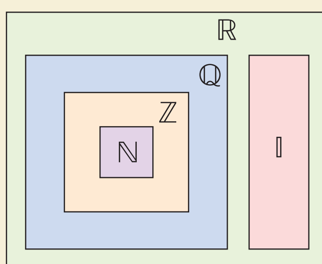


Figura 2

Ten en cuenta

La relación que hay entre el conjunto $\mathbb{R}$ y los demás conjuntos se representa así:





TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt01

Encuentra y explora algunas situaciones problema relacionadas con el valor absoluto de los números reales.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.

6.2 Orden en el conjunto de los números reales

Los números reales guardan una **relación de orden** en la que, para dos números reales *a* y *b*, se cumple una y solo una de las siguientes condiciones: $a > b$, $a < b$ o $a = b$.

Entonces:

$a > b$ ⟶ si $a - b > 0$ ($a - b$ es positivo)

$a < b$ ⟶ si $a - b < 0$ ($a - b$ es negativo)

$a = b$ ⟶ si $a - b = 0$ ($a - b$ es igual a cero)

Ejemplo 2

Para establecer el orden entre los números $-2.456\,7$; $\sqrt{3}$; -3; π; $-1,\widehat{234}$ y $\frac{5}{3}$, se pueden comparar las expresiones decimales de cada uno.

Los números decimales correspondientes son:

$-2,4567$ $\quad\sqrt{3} = 1,7320$ $\quad -3 = -3,0000$

$\pi = 3,1415$ $\quad -1,\widehat{234} = -1,2342$ $\quad \frac{5}{3} = 1,6666$

Como los números reales negativos son menores que los reales positivos, se tiene que $-2,4567$; $-3,0000$ y $-1,2342$ son menores que $1,7320$; $3,1415$ y $1,6666$.

Para ordenar los decimales, se comparan las partes enteras. Si son iguales, se empieza a comparar decimal por decimal, de izquierda a derecha.

Entonces, el orden final de los seis números es:

$$-3,0000 < -2,4567 < -1,2342 < 1,6666 < 1,7320 < 3,1415$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

3 En la competencia automovilística Indy Car que se realiza en Estados Unidos, participan cuatro corredores. Para la primera carrera del año, que se lleva a cabo en un circuito callejero en la ciudad de San Petersburgo, Florida, los corredores obtuvieron los siguientes tiempos en la *pole position* (posición de salida).

Número	Corredor	Equipo	Tiempo
18	Carlos Huertas	Dale Coyne Racing	01:01,9716
2	Juan Pablo Montoya	Team Penske	01:00,8532
26	Carlos Muñoz	Andretti Autosport	01:01,4890
98	Gabriel Chaves	Bryan Herta Autosport	01:01,9705

Tabla 1

¿Cuál es el orden de salida los corredores, según sus tiempos en la *pole position*?

Solución:

Para resolver este problema, se comparan los tiempos que los corredores tardaron en dar su mejor vuelta. Estos fueron:

01:01,9716 $\quad$ 01:00,8532 $\quad$ 01:01,4890 $\quad$ 01:01,9705

Como los cuatro corredores tardaron más de un minuto, basta comparar las expresiones decimales que representan los segundos, las décimas, las centésimas y las milésimas de segundo.

Así, el orden de los tiempos de menor a mayor es:

$$0,8532 < 1,4890 < 1,9705 < 1,9716$$

Luego, el orden de salida es: Montoya, Muñoz, Chaves y Huertas.

Ten en cuenta

Para comparar números decimales, se comparan las partes enteras de los números. Si son iguales, se comparan las cifras decimales de izquierda a derecha hasta que una de ellas sea menor o mayor que la otra.

6,7893 $\quad$ 6,7892

$6 = 6$

$7 = 7$

$8 = 8$

$9 = 9$

$3 < 2$

Ten en cuenta

El tiempo de Carlos Huertas significa que su vuelta más rápida fue de 1 minuto, 01 segundos y que el decimal correspondiente a las décimas de segundo es 9, a centésimas, 7 y a milésimas, 1.



SM Ediciones

6 Números reales

Ten en cuenta

Las desigualdades son todas las expresiones en las que se involucran los símbolos $<, >, \leqslant, \geqslant$.

La desigualdad $a \leqslant b$, “a menor o igual que b”, significa que $a < b$ o $a = b$.

De otro lado, $a \geqslant b$, “a mayor o igual que b”, significa que $a > b$ o $a = b$.

Así, si $a \leqslant 5$, está la posibilidad de que suceda que $a < 5$ o que $a = 5$.

6.3 Propiedades de las relaciones de orden

Para *a*, *b* y *c*, números reales, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Ejemplo
Propiedad 1 (transitiva) Si $a < b$ y $b < c$, entonces: $a < c$.	$-2 < 3$ y $3 < 5$, entonces $-2 < 5$.
Propiedad 2 Si $a < b$, entonces: $a + c < b + c$.	Si $e < \pi$, entonces $e + 3 < \pi + 3$.
Propiedad 3 Si $a < b$ y $c > 0$, entonces: $a \cdot c < b \cdot c$.	Si $-5 < 7$ y $9 > 0$, entonces: $(-5) \cdot (9) < (7) \cdot (9)$ y, por lo tanto, $-45 < 63$.
Propiedad 4 Si $a < b$ y $c < 0$, entonces: $a \cdot c > b \cdot c$.	Si $-5 < 7$ y $-6 < 0$, entonces: $(-5)\cdot(-6) > (7)\cdot(-6)$ y, por lo tanto, $30 > -42$.
Propiedad 5 Si $a < b$ y $c < d$, entonces: $a + c < b + d$.	Si $8 < 11$ y $-5 < 3$ entonces: $8 + (-5) < 11 + 3$ o $3 < 14$.
Propiedad 6 Si $a \cdot b < 0$, entonces: $a > 0$ y $b < 0$ $a < 0$ y $b > 0$	Si $-21 < 0$, existen estas dos opciones: $a = -7$ y $b = 3$, ya que $(-7)\cdot(3) = -21$. $a = 7$ y $b = -3$, porque $(7)\cdot(-3) = -21$.
Propiedad 7 Si $a \cdot b > 0$, entonces:: $a > 0$ y $b > 0$ $a < 0$ y $b < 0$	Si $55 > 0$, se tiene que : $5 > 0$ y $11 > 0$, ya que $(5)\cdot(11) = 55$. $-5 < 0$ y $-11 < 0$, ya que $(-5)\cdot(-11) = 55$
Propiedad 8 Si $a > b$, $a > 0$ y $b > 0$, entonces: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.	Como $13 < 17$ y, además, $13 > 0$ y $17 > 0$, entonces $\frac{1}{17} < \frac{1}{13}$.

Actividad resuelta

Ejercitación

4 Escribe cuál es la propiedad que se aplica en cada caso.

a. $-\sqrt[3]{5} < -\frac{4}{3}$ y $-\frac{4}{3} < -0,\widehat{3}$, entonces $-\sqrt[3]{5} < -0,\widehat{3}$.

b. $7,1234 < 9,1233$, entonces $7,1234 + (-1,55) < 9,1233 + (-1,55)$.

c. Si $-\sqrt{5} < -\sqrt{3}$, entonces $\left(-\sqrt{5}\right)(-5) < \left(-\sqrt{3}\right)(-5)$.

d. Si $\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$ y $\frac{3}{9} < \frac{3}{5}$, entonces $\frac{7}{9} + \frac{3}{9} < \frac{4}{5} + \frac{3}{5}$.

e. Si $\frac{-3}{4} < \frac{-5}{7}$, entonces $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (2) < \left(\frac{-5}{7}\right) \cdot (2)$; luego, $\frac{-6}{4} < \frac{-10}{7}$.

Solución:

a. Propiedad 1 (transitiva)

b. Propiedad 2

c. Propiedad 4

d. Propiedad 5

e. Propiedad 3

CULTURA del Buen Vivir

La honestidad

Una persona honesta sigue reglas y patrones de comportamiento que ponen en evidencia su sinceridad y transparencia al resolver situaciones cotidianas.

- Expresa dos acciones relacionadas con el valor de la honestidad en la clase de matemáticas.

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

5 Encierra los conjuntos a los que pertenece cada número.

a.	$\frac{3}{5}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
b.	$-\sqrt{3}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
c.	$\frac{6}{1}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
d.	-9	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
e.	$\frac{-4}{4}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
f.	$\sqrt{2}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
g.	$-5,\overset{\frown}{124}$	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
h.	4	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
i.	0,331	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
j.	π	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ

6 Calcula el valor absoluto de los siguientes números.

a. $-\varphi$ b. $-1{,}234\,56$ c. $\frac{9}{5}$

d. 4.678 e. $-\sqrt[2]{5}$ f. 105

7 Expresa en forma decimal los siguientes números. Después, determina su orden de menor a mayor.

$\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$1+\varphi$
-2	$\sqrt[3]{9}$	$\frac{11}{4}$	2,645 73

Razonamiento

8 Emplea los signos <, > o =, según corresponda.

a. $3 \square \frac{17}{2}$ b. $2 \square \sqrt{3}$

c. $4 \square \frac{12}{3}$ d. $\pi \square \frac{7}{2}$

e. $-\frac{\pi}{2} \square -\frac{2\pi}{4}$ f. $-\sqrt{7} \square -\sqrt{10}$

9 Halla los valores de *x* e *y* necesarios para que se cumpla la siguiente relación.

$$\sqrt{13} < \frac{x}{y} < \sqrt{14}$$

Comunicación

10 Aplica las propiedades de las relaciones de orden entre los números reales y completa las expresiones con los signos <, > o =, según corresponda.

a. Si $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} + 5 \square 2 + 5$.

b. Si $-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow -\sqrt{3} \cdot 3 \square 1 \cdot 3$.

c. Si $2 > \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \square 2$.

d. Si $-3 \cdot x > 0 \Rightarrow x \square 0$.

e. Si $a = 3$ y $b = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$.

f. Si $9 \cdot z < 0 \Rightarrow z \square 0$.

Resolución de problemas



11 En el pueblo Cube, en la pasada sequía, un río se encontraba a 90 cm por debajo del nivel de inundación (*A*). Para este invierno, un servidor público tomó la medida actual del río (*B*) y determinó cuánto aumentó. El cálculo que hizo fue: $d(A, B) = |-90-140|$. Según esto, ¿cuál es la altura del río actualmente, respecto al nivel de inundación anterior?



12 Un submarino se encuentra a 7 000 pies bajo el nivel del mar y un helicóptero se encuentra a 3 000 pies sobre el nivel del mar. Cuando están justo uno debajo del otro en una línea vertical, ¿cuál es la distancia que los separa?

13 La profesora le pide a sus estudiantes que escriban una lista de cuatro números reales que no sean naturales ni irracionales. Analiza las respuestas de Ruth y Martín. ¿En qué se equivocó cada uno? ¿Por qué?

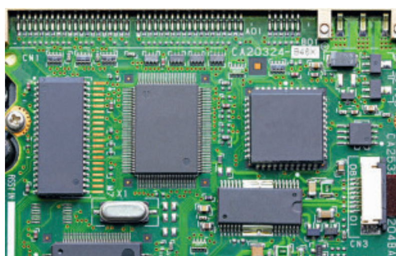
Ruth: $\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $-\frac{56}{5}$, $-0{,}25$

Martín: $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{5}$, $\sqrt{16}$, 4,31

7 Intervalos y semirrectas

Explora

En una compañía encargada del encapsulado de circuitos integrados de silicio solo pueden admitir ciertas especificaciones en las dimensiones de estos. Admiten circuitos con espesor de 0,78 cm y de una tolerancia de 0,05 cm. Según esto, ¿qué rango de dimensiones para los circuitos permiten?


SM Ediciones

En la compañía electrónica utilizan integrados de 0,78 cm de espesor, pero admiten integrados que sean hasta 0,05 cm más gruesos o hasta 0,05 cm más delgados. Por lo tanto, la compañía admite circuitos cuyo espesor esté entre 0,73 cm y 0,83cm, es decir, circuitos que estén en el intervalo [0,73; 0,83].

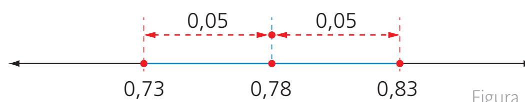


Figura 1

7.1 Intervalos

Los **intervalos** son subconjuntos de los números reales y están conformados por todos aquellos números que se ubican entre dos números llamados **extremos**.

Para *a* y *b* ∈ ℝ, donde *a* y *b* son los extremos de un intervalo, se tiene:

Tipo de intervalo	Descripción y ejemplo
Intervalo cerrado (Figura 2)	Es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números *a* y *b*, donde *a* y *b* pertenecen al conjunto. Así: $[a, b] = \left\{\frac{x}{a} \leq x \leq b\right\}$
Intervalo abierto (Figura 3)	Incluye a todos los números reales que se encuentran entre los dos números *a* y *b*, donde *a* y *b* no pertenecen al conjunto. Así: $(a, b) = \left\{\frac{x}{a} < x < b\right\}$
Intervalos semiabiertos (Figura 4 y Figura 5)	**Abierto a la derecha:** es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números *a* y *b*, donde *a* pertenece al conjunto y *b* no pertenece al conjunto. Así: $[a, b) = \left\{\frac{x}{a} \leq x < b\right\}$
	Abierto a la izquierda: es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números *a* y *b*, donde *a* no pertenece al conjunto y *b* pertenece al conjunto. Así: $(a, b] = \left\{\frac{x}{a} < x \leq b\right\}$

Tabla 1

Intervalo cerrado

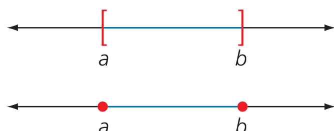


Figura 2

Intervalo abierto

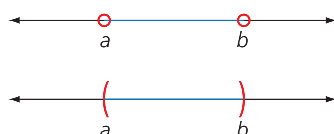


Figura 3

Intervalo abierto a la derecha

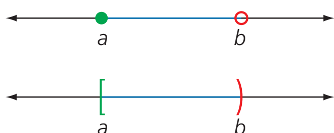


Figura 4

Intervalo abierto a la izquierda

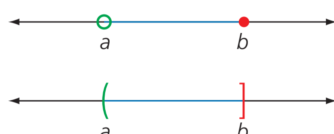


Figura 5

Ejemplo 1

Observa la descripción de cada intervalo.

- $[-3, 2] = \left\{\frac{x}{-3} \leq x \leq 2\right\}$ está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que -3 y que son menores o iguales que 2.
- $[-4, 3) = \left\{\frac{x}{-4} \leq x < 3\right\}$ está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que -4 y menores que 3.

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

7.2 Semirrectas y su representación gráfica

Las semirrectas son la representación gráfica de conjuntos de números reales que son mayores o iguales que un número dado y se les llaman intervalos infinitos por el uso del símbolo ∞. De manera general, para $a \in \mathbb{R}$.

Semirrecta abierta positiva	$(a, +\infty) = \left\{\frac{x}{a} < x\right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son mayores que *a*.
Semirrecta cerrada positiva	$[a, +\infty) = \left\{\frac{x}{a} \leq x\right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que *a*.
Semirrecta abierta negativa	$(-\infty, a) = \left\{\frac{x}{x} < a\right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son menores que *a*.
Semirrecta cerrada negativa	$(-\infty, a] = \left\{\frac{x}{x} \leq a\right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son menores o iguales que *a*.

Tabla 2

Ejemplo 2

$(-4, +\infty)$ es el conjunto de todos los números reales mayores que -4.



Figura 6

$[3, +\infty)$ es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 3.

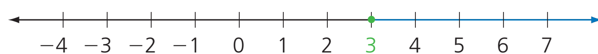


Figura 7

$(-\infty, 1]$ es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 1.

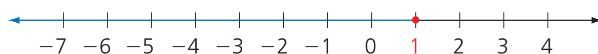


Figura 8

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Representa estas desigualdades: $|x| < 3$; $|x| < 4$ y $|x| > 2$.

Solución:

- $|x| < 3$ se puede escribir como $-3 < x < 3$; este es un intervalo abierto con extremos -3 y 3. Su representación gráfica es:

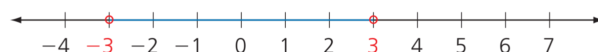


Figura 9

- $|x| < 4$ se puede escribir como $-4 \leqq x \leqq 4$; este es un intervalo cerrado con extremos -4 y 4. Su representación gráfica es:

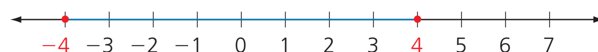


Figura 10

- $|x| > 2$ y $|x| > 2$ se puede escribir como $x < -2$ y $x > 2$ y $x \leqslant -2$ y $x \geqslant 2$. Su representación gráfica es:

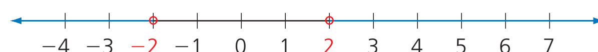
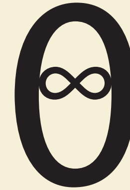


Figura 11

Ten en cuenta

El símbolo para representar el infinito (∞) lo utilizó por primera vez el matemático John Wallis en 1965. En los intervalos, los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se leen "más infinito" y "menos infinito", respectivamente. Ten en cuenta que ∞ no es un número.


CERO DISFRAZADO DE INFINITO

Ten en cuenta

La desigualdad con valor absoluto $|x| < a$ es el intervalo $(-a, a)$, es decir, $-a < x < a$. Su representación gráfica es:

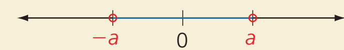


Figura 12

Una desigualdad cuyo valor absoluto es $|x| > a$ es la unión de los intervalos $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, es decir, $x < -a$ y $x > a$. Su representación gráfica es:

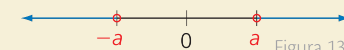


Figura 13

7 Intervalos y semirrectas

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Ten en cuenta la definición dada para los diferentes intervalos y completa los ejercicios.

a. $(2, 9) = \left\{\frac{x}{2} \square x < 9\right\}$

b. $[-3, 13] = \left\{\frac{x}{\square} \leq x \leq 13\right\}$

c. $(\square - 1{,}1) = \left\{\frac{x}{-1} < x < 1\right\}$

d. $(-7, \square] = \left\{\frac{x}{2} < x \leq 11\right\}$

e. $(-9, \infty) = \left\{\frac{x}{-9} \square x\right\}$

3 Ten en cuenta las definiciones de intervalos y completa.

a. $(7, 19) = \{x\ /\qquad\qquad\}$

b. $[1, -9] = \{x\ /\qquad\qquad\}$

c. $[-10, 13) = \{x\ /\qquad\qquad\}$

d. $(-15, -9] = \{x\ /\qquad\qquad\}$

e. $(2.5, 7.3) = \{x\ /\qquad\qquad\}$

4 Represente los siguientes intervalos.

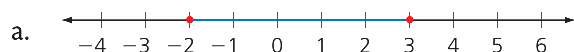
a. $(-9, 2)$ b. $(-9, 1)$

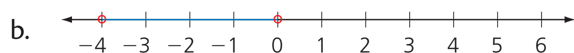
c. $[-5, 5]$ d. $(-1, 9)$

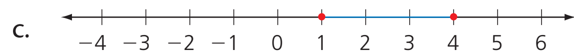
e. $(-3, 9)$ f. $(3, 11)$

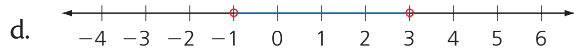
Razonamiento

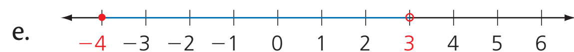
5 A partir de la gráfica establece el intervalo, en cada caso.

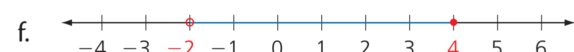
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

Comunicación

6 Grafica los siguientes intervalos.

a. $(-1, 2)$ b. $[3, 10]$

c. $(-9, -1]$ d. $(-2, +\infty)$

Ejercitación

7 Una diana tiene cuatro círculos concéntricos. El primer círculo (rojo) tiene un radio de 15 cm, el segundo (verde) tiene 15 cm de más que el anterior, el tercero (amarillo) tiene 15 cm más que el anterior y el cuarto (azul) 15 cm más que el anterior.

Un jugador lanzó diez dardos como se ve en la Figura 14. Sus distancias al centro son: 5 cm; 20,5 cm; 15,3 cm; 45 cm; 55,9 cm; 29,9 cm; 20 cm; 16 cm; 15,5 cm y 45,9 cm. Luego, se pueden establecer intervalos de las diferentes longitudes de cualquier punto en el tablero al centro.

a. ¿Cuáles son los intervalos de longitud para los diferentes colores?

b. ¿Cuántos dardos cayeron por cada color?

c. ¿Cuál es el puntaje obtenido por el jugador?

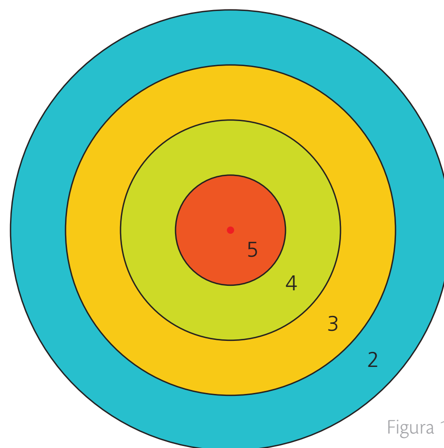


Figura 14

8 Una compañía de electrónica tiene especificaciones en el encapsulado de los circuitos que se utilizan en una computadora. Solamente instalará aquellos cuyo espesor se encuentre dentro de la tolerancia de 0,07 centímetros. Según esta información, completa la Tabla 3

Tipos de circuito	Espesor indicado	Intervalo de aceptación	
		Bajo	Alto
A	0,78 cm		
B	0,643 cm		
C	0,993 cm		

Tabla 3

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Desarrolla tus destrezas

Resolución de problemas

9 El crecimiento en los seres humanos desde su nacimiento está asociado a su edad, peso y altura. En la siguiente tabla encontrarás la relación entre edad, altura y peso de un ser humano normal, desde su nacimiento hasta los cuatro años de edad. Para cada edad se encuentran tres valores, tanto en peso como en altura, que establecen un valor mínimo, un medio y un máximo.

Edad	Altura (normal en cm)			Peso (normal en kg)		
	Mínimo	Medio	Máximo	Mínimo	Medio	Máximo
Nacimiento	46,5	50,1	53,8	2,8	3,4	4,2
3 meses	55	60	65	4,55	5,75	6,95
6 meses	61,8	66,4	71	6,05	7,6	9,15
12 meses	69,7	74,3	79,9	7,65	9,75	11,85
18 meses	75,1	80,5	85,9	8,75	11,2	13,65
2 años	79,9	85,7	91,5	9,8	12,2	14,6
3 años	87,3	94,3	101,3	11,04	14,05	16,9
4 años	93,4	101,2	109	12,06	16	19,4

Tabla 4

a. ¿Qué significa que una niña de seis meses tenga una altura de 73 cm y un peso de 7 kg?

b. ¿Cuál sería el intervalo para la altura de un bebé de 18 meses?

c. ¿Cuál es el intervalo del peso para un niño de tres años?

10 Necesitamos clasificar la longitud de algunos colores producidos por una fábrica. Los colores tienen longitudes entre 10 cm y 16 cm. Establece tres intervalos que abarquen todas las posibles longitudes de los colores que la fábrica produce.



11 En una encuesta, a los estudiantes de un colegio de grado noveno se les preguntó acerca de su estatura. Los datos obtenidos son:

Edad	Altura	Edad	Altura	Edad	Altura
10	140 cm	13	150 cm	15	174 cm
16	160 cm	11	150 cm	16	175 cm
12	145 cm	13	170 cm	14	153 cm
15	158 cm	12	165 cm	14	168 cm
16	155 cm	15	165 cm	13	165 cm

Tabla 5

Para organizar los datos de la estatura, se establecieron los siguientes intervalos: [130, 140); [140, 150); [150, 160); [160, 170); [170, 180).

a. ¿Cuántos estudiantes hay en cada intervalo?

b. ¿Qué edades se hallan en cada intervalo?

c. ¿Por qué dos intervalos consecutivos tienen el mismo valor extremo, uno por derecha y el siguiente por izquierda?

12 La siguiente imagen, presentada por la Organización Mundial de la Salud (OMS) en el año 2007, muestra la curva de crecimiento, entre la edad en años y la altura (talla) en cm, para niños y adolescentes que tienen entre cinco y catorce años de edad.

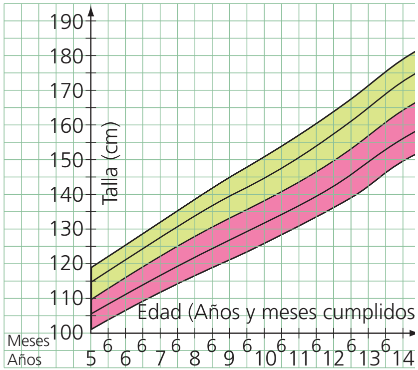


Figura 15

Los colores verde y rosado indican los valores a tener en cuenta para establecer los valores normales (verde) y los valores de alerta en la talla de un niño de estas edades.

a. Para un niño de nueve años y seis meses, ¿cuál es el intervalo de valores para el que su talla es normal?

b. ¿Qué puedes decir de un niño de doce años que tiene talla de 170 cm?

c. ¿Cuál es el intervalo de valores donde la talla es normal en un niño de catorce años y tres meses?

8 Operaciones con números reales

Explora

El cráter producido por un meteorito en la superficie de cierto planeta deja una cresta de $9\sqrt{3}$ m de altura, y presenta una profundidad máxima de $-20\sqrt{3}$ m, como se muestra en la Figura 1

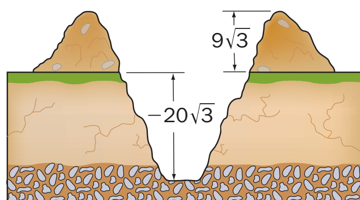


Figura 1

- ¿Qué operación permite calcular la distancia vertical entre la cresta y el punto más profundo del cráter?

Para calcular la distancia vertical entre la cresta y el punto más bajo del cráter, es necesario hallar la diferencia entre las longitudes dadas. Esto es:

Minuendo Sustraendo

$$9\sqrt{3}\text{ m} - \left(-20\sqrt{3}\text{ m}\right) = 9\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 29\sqrt{3}$$

Inverso aditivo del sustraendo

Entonces, la distancia es de $29\sqrt{3}$ m.

En el anterior problema se observa que tanto los datos como la respuesta pertenecen a los números reales; es decir que las operaciones de tipo aditivo entre reales cumplen con la propiedad clausurativa. A continuación se estudian otras propiedades de las operaciones con números reales.

8.1 Adición y sustracción de números reales

Si a y b son dos números reales, la expresión $a + b$ corresponde a la **suma** de los sumandos y se llama **adición** a y b.

La **sustracción** o **resta** entre dos números reales es la expresión $a - b$. Esta operación es equivalente a la adición $a + (-b)$.

De forma general, para tres números reales (a, b y $c \in \mathbb{R}$) se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización	Explicación
Clausurativa	Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b \in \mathbb{R}$.	La suma de dos números reales es otro número real.
Conmutativa	$a + b = b + a$	No importa el orden en que sumen los dos números reales, pues la respuesta es igual.
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Para sumar tres números reales, se pueden sumar dos y luego el tercero. No importa cómo se agrupen, pues la respuesta es igual.
Modulativa	Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$.	Existe el número 0, tal que para todo número real a, la suma con 0 da como resultado el mismo número a.
Invertiva	Para todo número real a, existe $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.	Todo número real (a) tiene en el conjunto de los reales un número real llamado opuesto o inverso aditivo ($-a$). Al sumarlos da cero.

Tabla 1

Ejemplo 1

Un turista se encuentra en el punto A y se dirige hasta el punto B. Para ello tiene que desplazarse por diferentes trayectos cuyas distancias son: $40\sqrt{5}$ m, 20 m, $5\sqrt{5}$ m, $60\sqrt{3}$ m, 12 m y $12\sqrt{3}$ m, respectivamente.

- Así, la distancia total que recorre el turista está dada por la adición. Observa:

  $40\sqrt{5} + 20 + 5\sqrt{5} + 60\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{3} =$

  $\left(40\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right) + (20 + 12) + \left(60\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) =$

  $45\sqrt{5} + 32 + 72\sqrt{3} = 257{,}33072$

  Aproximando por truncamiento a la décima, se obtiene: 257,33.

- Entonces, el turista debe recorrer aproximadamente 257,33 m de distancia total.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

8.2 Multiplicación y división de números reales

Si a y b son dos números reales, se llama multiplicación o producto a la expresión $a \cdot b$. Se utilizan expresiones alternas para indicar el producto; estas son:

$$a \cdot b = a \times b = (a)(b) = ab$$

La división o el cociente entre dos números reales es la expresión $a \div b$ o $\frac{a}{b}$.

Este cociente se puede organizar de la forma $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$.

De forma general, para tres números reales (a, b y $c \in \mathbb{R}$) se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización	Explicación
Clausurativa	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	El producto de dos números reales es otro número real.
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	El orden en el que se multipliquen dos números reales no altera el resultado.
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Para multiplicar tres números reales, basta con multiplicar dos y luego multiplicarlos por el tercero, sin importa el orden en el que se agrupen.
Modulativa	Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$	Al multiplicar cualquier número real a por 1, el resultado es el mismo número a.
Invertiva	Para todo real a (a) existe a^{-1}, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.	Todo número real (a) tiene en el conjunto de los reales un número real llamado inverso, tal que al multiplicarlo por él su producto es 1.
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	El producto de una suma por un número a es igual a la suma de los productos del número a por cada uno de los términos de la suma.

Tabla 2



Figura 2

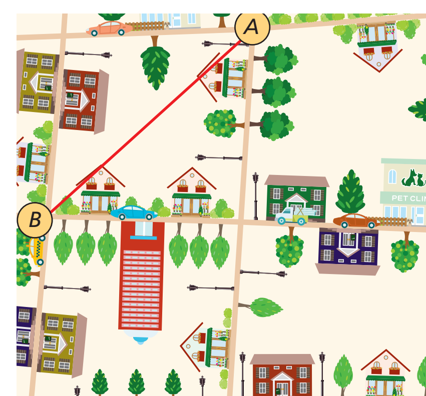


Figura 3

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Calcula la velocidad a la que viaja el sonido de una vuvuzela, si se sabe que la velocidad de propagación v es: $v = \frac{x}{t} = \frac{distancia}{tiempo}$. Ten en cuenta esto:

a. La distancia entre el punto A y B es de 27 metros (Figura 2) y el sonido tarda cuatro segundos en llegar de un punto al otro.

b. La distancia vertical es de 15 m y horizontal es de 9 m. Además, el sonido se demora cinco segundos en llegar de un punto al otro.

Solución:

a. En este caso, basta con reemplazar los datos en la fórmula inicial. Así, a velocidad v será: $v = \frac{x}{t} = \frac{27 \text{ metros}}{4 \text{ segundos}} = \frac{27}{4}$ m/s 5 6,75 m/s.

b. Como no se conoce la distancia que hay entre A y B (Figura 3), primero se calcula esta medida así: $\sqrt{15^2 + 9^2} = 3\sqrt{34}$ metros. Después se aplica la fórmula $v = \frac{x}{t} = \frac{3\sqrt{34} \text{ metros}}{5 \text{ segundos}} = \frac{3\sqrt{34}}{5}$ m/s 3,49857 m/s.

8 Operaciones con números reales

MatemaTICS

Programar la calculadora para aproximar decimales

Las calculadoras científicas se pueden programar para que los resultados se muestren con una aproximación por redondeo y con tantas cifras decimales como se necesite.

Ejemplo.

Programa la calculadora para que los resultados se aproximen por redondeo a dos cifras decimales.

1. En la opción Menú (MENU) se oprime Shift y Menú (SHIFT MENU) para ir a la zona de programación Set Up.

1: MTHIO 2: LINE IO 3: DEG 4: RAD
5: GRA 6: FIX 7: SCI 8: NORM

2. Aparecen en la pantalla varias opciones, entre ellas la opción Fix, que se encuentra precedida de un número. Se oprime la tecla con el número relacionado con la función Fix, que es el número 6: SHIFT MENU 6.

FIX 0 Z 9?

3. La calculadora da las opciones de 0 Z 9 para establecer cuántas cifras decimales se requieren para aproximar el número. Después, basta con oprimir la tecla que muestra el número que se desea, que en este caso es 2. Después, pulsa SHIFT MENU 6 2.

0.00

4. Entonces, para calcular $\sqrt{3}$, se digita la secuencia SHIFT x^2 3 EXE.

$\sqrt{3}$

5. Finalmente, se oprime la tecla F↔D.

1.73

Ahora practica: programa la calculadora para que las respuestas se aproximen con cinco cifras decimales y calcula 6 ÷ 7.

Desarrolla tus competencias

Ejercitación

2 Selecciona la suma o la diferencia en cada caso.

a. $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$
b. $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
c. $11\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$
d. $11\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$
e. $8\pi - 13\pi$

$9\sqrt{3}$	$3\sqrt{9}$	$9\sqrt{6}$
$5\sqrt{14}$	$7\sqrt{5}$	$5\sqrt{7}$
$11\sqrt{13}$	$13\sqrt{11}$	$13\sqrt{22}$
$11\sqrt{9}$	$9\sqrt{11}$	$9\sqrt{0}$
5π	21π	-5π

3 Selecciona el producto o el cociente en cada caso.

a. $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{7} \div 3\sqrt{7}$
c. $11\sqrt{11} \times 2$
d. $\frac{4}{3} \times \frac{\pi}{5}$

$35\sqrt{2}$	35×4	70
$5\sqrt{14}$	$7\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$
$11\sqrt{13}$	$22\sqrt{11}$	$13\sqrt{22}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{15}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

4 Encuentra una expresión simplificada para cada uno de los siguientes cocientes.

a. $\sqrt{2} \div \frac{1}{2}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{4} \div \frac{1}{4}$

c. $1 \div \sqrt{2}$

d. $\frac{2}{3} \div \sqrt{3}$

e. $\sqrt{5} \div \frac{2}{5}$

f. $\pi \div \frac{3}{4}$

Comunicación

5 Indica la propiedad que se debe usar en cada caso.

Ejercicio	Propiedad
$\frac{3}{5\pi} - \frac{3}{5\pi} = 0$	
$\sqrt{7} * \sqrt{5} * \sqrt{6} = \left(\sqrt{35}\right) * \sqrt{6} = \sqrt{210}$	
$\frac{7}{3} + 0 = \frac{7}{3}$	

Tabla 2

6 Completa la Tabla 3 con la fórmula de la velocidad de propagación del sonido, $v = \frac{x}{t}$; $t = \frac{x}{v}$; $x = tv$.

Velocidad (v)	Tiempo (t)	Distancia (d)
	10 seg.	$d = 50$ m
1,2 m/s	5 seg.	$d = ?$
2,5 m/s		$d = 40$
10 m/s	4 seg.	$d = 40$
	$\frac{3}{2}$ seg.	$d = 15$ m
	2 seg.	$d = 13$
2,5 m/s	2 seg.	$a = 5$

Tabla 3

Razonamiento

7 Calcula la distancia que recorre la rueda de una bicicleta si el plato de pedales da una vuelta. Ten en cuenta que el radio de la rueda y del plato son 50 cm y 15 cm, respectivamente, como se ve en la Figura 4.

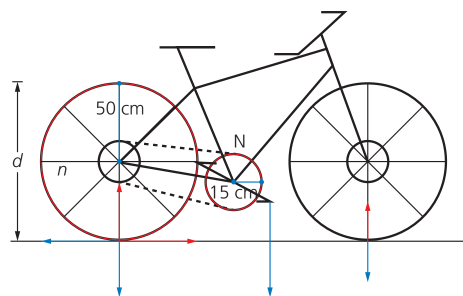


Figura 4

8 Calcula la distancia recorrida por un turista desde el punto A hasta el punto B, como se ve la Figura 5.



Figura 5

Resolución de problemas

9 Encuentra una expresión numérica para el área de cada figura y resuelve.

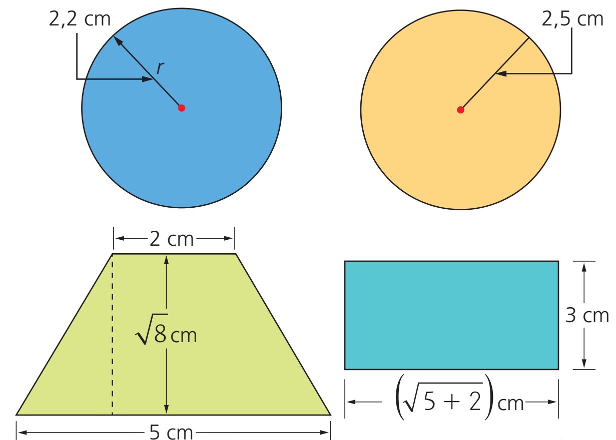


Figura 6

a. ¿Cuál es la figura con mayor área?

b. ¿Cuál es la figura con menor área?

c. Propón una figura cuya área sea aproximadamente igual a alguna de estas figuras.

10 La longitud de una circunferencia se expresa con un número irracional. Indica el valor que debe tener el radio de una circunferencia para que la longitud sea un número racional. Justifica tu respuesta.

11 Halla la arista de un cubo si se sabe que tiene una capacidad de 2 000 L. Utiliza las cuatro operaciones básicas y describe el procedimiento que seguiste.

12 Determina cuál es la medida del radio de un círculo si se conoce que la longitud de la circunferencia correspondiente mide 10π cm. Después, explica el procedimiento que utilizaste para hallar tu respuesta.

9 Potencia de un número real

Explora

El cultivo de una bacteria Alpha (α) se duplica cada hora. En el laboratorio comienzan con tres bacterias; luego de una hora hay seis bacterias y, al cabo de dos, tres, y cuatro horas, hay 12, 24 y 48 bacterias, respectivamente.

- ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de cinco horas?
- Si hay 384 bacterias, ¿cuánto tiempo ha pasado?



El crecimiento de la bacteria Alpha se puede determinar a partir de la siguiente tabla:

Población	3	6	12	24	48	96	192	384	768
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Se observa que la bacteria crece potencialmente en relación con el tiempo.

Al cabo de seis horas, la población de la bacteria Alpha es de 192. Cuando la población es de 384 han pasado siete horas.

Esta relación entre la población y el tiempo está determinada por una regla matemática que se puede representar así:

Cantidad de bacterias $= 3 \cdot 2^t$

Ahí, 3 es la cantidad de bacterias inicial, el 2 indica que la cantidad se está duplicando y t corresponde al tiempo transcurrido.

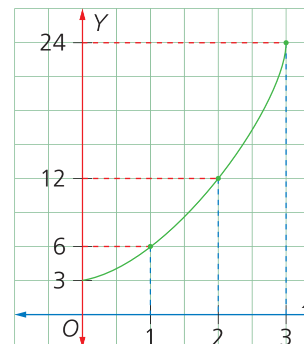


Figura 1

9.1 Propiedades de la potenciación de números reales

Si a es un número real y n, m son enteros positivos, la **potencia** es la expresión a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

La potenciación se puede considerar como una operación abreviada de una multiplicación reiterada con el mismo factor. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, la potenciación cumple las siguientes propiedades:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$a^1 = a$	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$ $a \neq 0$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Tabla 1

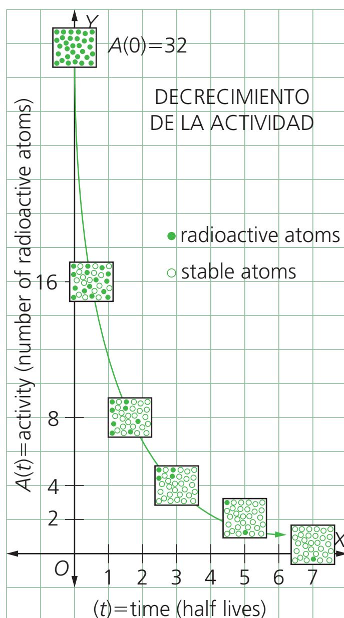


Figura 2

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Las sustancias radioactivas se descomponen potencialmente con el tiempo.

Por ejemplo, el isótopo de yodo se descompone cada ocho días a la mitad de su valor. Si el valor inicial es x, halla la parte del valor inicial después de 40 días.

Solución:

a. Haz una tabla para relacionar la cantidad del isótopo y el tiempo transcurrido. Para el día cero, el isótopo tiene el 100%; luego de ocho días hay el 50% .

% isótopo yodo	100%	50%	25%	12,5%	6,25%	3,125%	1,562 5%
Tiempo (días)	0	8	16	24	32	40	48

Tabla 2

b. Después de 40 días solo queda el 3,125% del isótopo de yodo; el porcentaje **de isótopo** es $a * \left(\frac{1}{2}\right)^t$, donde a es la cantidad inicial del isótopo, $\frac{1}{2}$ es la relación de descomposición y t es el tiempo en días: $t = 8$.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza el cálculo de las siguientes potencias.

a. $(-2.34)^0$

b. $\left(\frac{5}{7}\right)^0$

c. $(-\pi)^0$

d. $5^3 \times 5^4$

e. $\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[3]{7^4}$

f. $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{-3}{5}\right)^2$

g. $(0{,}123)^3 \times (7)^3$

h. $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$

i. $(-2)^2 \times (-2)^2$

j. $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

k. $\sqrt{2^5} \div \sqrt{2^3}$

l. $(-5)^7 \div (-5)^6$

m. $\sqrt[4]{6^1}$

n. $\left(\frac{5}{3}\right)^2$

3 Utiliza las propiedades de las potencias para resolver.

a. $\left(\frac{2^3 3^3}{3^4 2^2}\right)^2$

b. $\sqrt{5^2 \cdot 3^3}$

c. $\left(\frac{2}{4}\right)^3 \left(\frac{-3}{2}\right)^2$

d. $\left(\left(\frac{\sqrt[6]{7^5}\,\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[4]{7^3}}\right)^3\right)^2$

e. $\left(\left(\frac{(-2)^4(-5)^4}{(-5)^4(-2)^4}\right)^4\right)^5$

f. $\left(\left(\left(\frac{0.\widehat{1234}}{-3.\widehat{2098}}\right)^4\right)^3\right)^0$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

4 El cultivo de una bacteria Betha (β) crece y se duplica cada dos horas. Si en el laboratorio comienzan con cinco bacterias, al cabo de dos horas hay diez bacterias y así sucesivamente, ¿cuántas bacterias hay alcabo de diez horas? ¿Si hay 640 bacterias, cuánto tiempo ha pasado?



5 Una sustancia radioactiva se decompone cada cinco días a la mitad de su valor anterior. Si el valor inicial es x, halla la fracción del valor inicial después de 40 días.



6 La siguiente es una tabla de un cultivo de bacterias que crece cada hora.

Población	4	12	36	108	324	972	2916
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6

Tabla 3

a. ¿Cómo es el crecimiento de esta bacteria ?

b. Completa la Tabla 4.

Población					
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4

Tabla 4

7 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la actividad anterior? Justifica tu respuesta.

a.

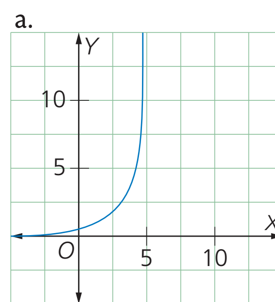


Figura 3

b.

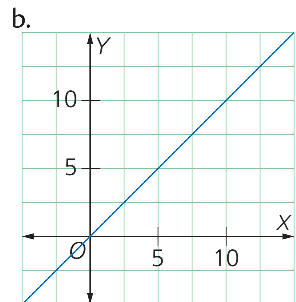


Figura 4

c.

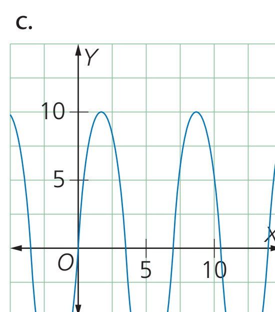


Figura 5

d.

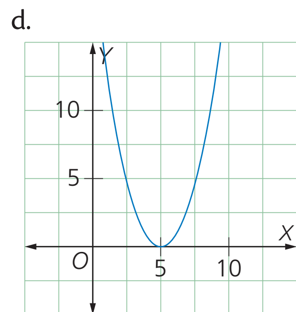


Figura 6

8 Un capital x se depositó en un fondo de crecimiento monetario. El capital se duplicó cada cinco años y después de quince años se retiró del fondo.

a. Respecto al capital inicial, ¿cuánto se incrementó el capital inicial después de cinco, diez y quince años?

b. Realiza una tabla donde se muestre la relación del capital inicial y su incremento cada cinco años.

c. Si el capital inicial es de $ 3 000 y este se deja en el fondo por 25 años, ¿cuál será el capital a los 5, 10, 15, 20 y 25 años?

d. Propón una situación similar de crecimiento potencial y resuélvela.

Practica Más

Números racionales

Ejercitación

1. Representa los siguientes conjuntos de números racionales. Luego ordénalos de menor a mayor.

a. $-\frac{13}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}$ **b.** $-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{3}{3}, -\frac{12}{3}, \frac{14}{3}$

c. $\frac{7}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{20}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{8}{10}$ **d.** $-\frac{4}{8}, \frac{14}{4}, -\frac{12}{8}, \frac{5}{4}, \frac{32}{8}$

Comunicación

2. Completa la siguiente tabla.

Fracción	Decimal	Generatriz	Clasificación
$-\frac{2}{6}$			
	1,4		
$-\frac{21}{6}$			
$\frac{7}{49}$			

Tabla 1

Ejercitación

3. Determina los números faltantes para que cada igualdad sea verdadera.

a. $-\frac{3}{8} + \frac{\square}{\square} - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$ b. $\frac{8}{3} = \frac{\square}{\square} - \frac{3}{5} + -\frac{12}{3}$

c. $2{,}69 + \frac{\square}{\square} = \frac{1}{5} - \frac{3}{10}$ d. $\frac{\square}{\square} = -\frac{4}{9} + 2\frac{5}{6}$

Números irracionales

Comunicación

4. Representa en la recta numérica los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{5}$ **b.** $2\sqrt{5}$

c. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ **d.** $\sqrt{3} - \sqrt{5}$

e. $\pi + \pi$ **f.** $-\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$

Números reales

Comunicación

5. Halla las distancias que existen entre los puntos señalados y el punto 0.

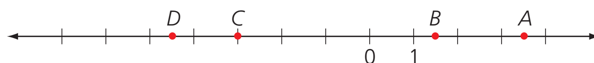


Figura 1

Razonamiento

6. Ubica cada conjunto de números en la recta numérica y establece en ellos la relación de orden.

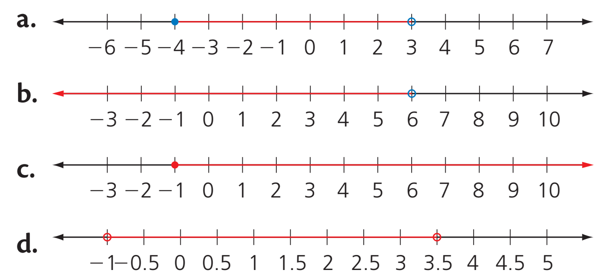
a. $2\pi; -1{,}3; \frac{1}{3}; \sqrt{2}; -\sqrt{3}; -1{,}4$

b. $-\pi; 3; -\frac{2}{5}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2\sqrt{2}$

c. $-2; \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}$

d. $\pi; -2{,}1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 3\sqrt{2}; -\sqrt{3}$

7. Identifica el intervalo que representa cada recta.



8. Represента en la recta numérica los siguientes intervalos.

a. $|x| \leq \sqrt{2}$ **b.** $-5 \leq x < \sqrt{2}$

c. $[\pi, 5)$ **d.** $[-\sqrt{3}, 1.9]$

Resolución de problemas

9. Resuelve cada una de las siguientes situaciones.

a. ¿Cuál es el perímetro de la Figura 2?

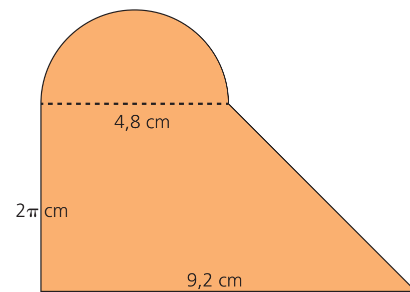


Figura 2

b. Para entrar a una atracción mecánica los niños deben medir más de 1,50 m pero menos de 190 cm. Representa en una recta y expresa mediante desigualdades.

c. Halla las dimensiones de un rectángulo que tiene como perímetro $64\sqrt{5} + 18\pi$.

d. Halla el área de una figura compuesta por dos circunferencias cuyos radios son 3 cm y 7 cm.

Resolución de **Problemas**

Estrategia: **Otra forma de comparar**

Problema

Dos tanques de agua iguales se encuentran ocupados en $\frac{12}{13}$ y $\frac{14}{15}$ de su capacidad respectivamente. ¿Cuál de los dos tiene mayor cantidad de agua en su interior?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener del enunciado?
  R: Que los dos tanques de agua tienen igual capacidad.
  R: Tienen diferente cantidad de líquido en su interior.
- ¿Qué debes encontrar?
  R: Cuál de ellos tiene mayor cantidad de agua en su interior.

2. Crea un plan

- Busca diferentes formas de comparar las fracciones para establecer un orden entre ellas y decidir cuál de los tanques tiene más agua.

3. Ejecuta el plan

- Una forma de comparar las fracciones, es desde su representación como número decimal.
  $12 \div 13 = 0{,}923\,0$ y $14 \div 15 = 0{,}933\,3$
  La segunda fracción es mayor.
- También se pueden comparar las fracciones, buscando un denominador común, y comparando las fracciones equivalentes con denominador común.
  m.c.m. (13, 15) = 195
  $\frac{12}{13} = \frac{180}{195}$ y $\frac{14}{15} = \frac{182}{195}$, la segunda fracción es mayor.
- También se pueden comparar las fracciones, realizando los productos cruzados. El orden entre estos productos, es el orden entre las fracciones.
  $\frac{12}{13}$ y $\frac{14}{15}$ 12×15 y 12×14, $180 < 182$

R: Tiene más agua el segundo tanque.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica sí $\frac{1}{13} < \frac{1}{15}$.

Aplica **la estrategia**

1. En la finca del abuelo de Camila hay dos caminos para ir de la casa al río. Uno tiene una distancia de $\frac{17}{8}$ km y el otro, una distancia de $\frac{16}{9}$ km. ¿Cuál de los dos caminos debe tomar Camila, si quiere recorrer la menor distancia?
   a. Comprende el problema
   ....
   ....
   b. Crea un plan
   ....
   ....
   c. Ejecuta el plan
   ....
   ....
   d. Comprueba la respuesta
   ....
   ....

Resuelve **otros problemas**

2. Cuando Andrés camina de su casa al colegio, debe atravesar un parque de forma cuadrada y cuyos lados miden 20 m. Si él lo atraviesa por su diagonal, ¿qué distancia recorre al atravesarlo?
3. En un plano cartesiano traza una circunferencia con centro en (0, 0) y cuyo radio sea la distancia del centro al punto (1, 1). ¿Qué punto corresponde al corte de la circunferencia con la parte positiva del eje x?
4. La expresión $C° = \frac{5}{9}(F° - 32)$, establece la equivalencia entre grados centígrados y grados Fahrenheit, ¿A qué temperatura en grados centígrados equivale una temperatura de -40 grados Fahrenheit?

Formula problemas

5. Invente un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

“La diagonal de un cuadrado de lado l es $\sqrt{2}$”

10 Notación científica

Explora

Se estima que el glóbulo rojo humano tiene un diámetro de 0,006 5 mm. Por su parte, la distancia de la Tierra al Sol mide alrededor de 150 000 000 000 m.

- ¿Qué características tienen los números que representan las medidas?
- ¿Conoces una forma abreviada de escribir estos números?

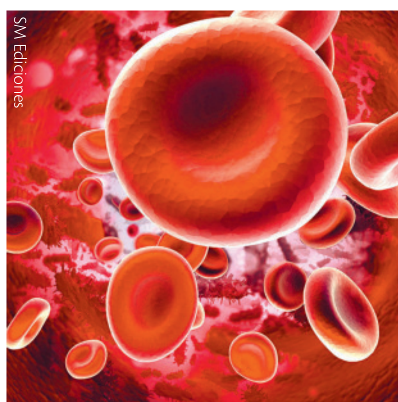


Figura 1

Mientras la medida del diámetro del glóbulo rojo (0,006 5 mm) corresponde a una medida muy pequeña, la medida de la distancia de la Tierra al Sol (150 000 000 000 m) es una medida muy grande.

El uso de estos números en su escritura extendida es muy complejo, debido a que en algunos casos se dificulta su lectura y en otros, su uso en las operaciones. Por ello, desde la antigüedad se dieron a la tarea de buscar maneras de representar estas y otras cantidades similares a partir de lo que hoy se conoce como notación científica.

La **notación científica** de un número real es su expresión como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de 10. La forma general de un número escrito a partir de su notación científica es:

$$k \cdot 10^n \text{ donde } 1 \leq k < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

Además, n es negativo cuando corresponde a la expresión de una cantidad muy pequeña y n es positivo cuando se relaciona con una cantidad muy grande.

Aplicando la notación científica a la escritura del diámetro del glóbulo rojo y la distancia de la Tierra al Sol, se obtiene lo siguiente:

$0{,}0065 \text{ mm} = 6{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$

Hay tres lugares entre el lugar de la coma y el 6. Por ello, el exponente de la potencia es -3.

$150\,000\,000\,000 \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{10} \text{ m}$

Hay diez lugares entre el final del número y el 1. Por ello, el exponente de la potencia es $+10$.

Ejemplo 1

La masa de la Tierra es aproximadamente de 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg. Para escribir este número usando la notación científica, se procede así:

- Se identifica cuál es la primera cifra mayor o igual a 1 y menor que 10, es decir, 5.
- Desde allí, se cuenta el número de lugares que hay hasta el final del número, que es 24. Este valor corresponde al valor del exponente del número 10.
- Se escribe la igualdad correspondiente como ve a continuación:

$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 597 \cdot 10^{22}$ kg.

Ejemplo 2

Los números 7 000 000 y 0,000 000 035 en notación científica se escriben así:

$$7\,000\,000 = 7 \cdot 10^6$$

$$0{,}000\,000\,035 = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$$

Para expresar cantidades grandes en notación científica, se emplean potencias positivas de 10, mientras que para expresar cantidades pequeñas, se emplean potencias negativas de 10.

Ejemplo 3

Una cienmillonésima de milímetro cuadrado puede escribirse como:

$$\frac{1}{100\,000\,000} \text{ mm}^2$$

Esta expresión equivale a 0,00000001 mm^2.

Dicha cantidad puede escribirse en forma más clara y corta con notación científica:

$$0{,}000\,000\,1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^2$$

Ten en cuenta

El primer intento de representar números demasiado grandes fue emprendido por el matemático y filósofo griego Arquímedes. Los describe en su obra *El contador de arena* del siglo III a. C. Él ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 Si el espacio de un chip de computadora mide 0,000 002 52 m de ancho, 0,000 000 14 m de largo y 0,000 225 m de alto, ¿cuál es su volumen?

Solución:

Para calcular el volumen, se multiplican los valores de las tres dimensiones así:

a. Primero se expresan las medidas en notación científica.

- Ancho: 0,000 002 52 m $= 2,52 \cdot 10^{-6}$
- Largo: 0,000 000 14 m $= 1,4 \cdot 10^{-7}$
- Alto: 0,000 225 m $= 2,25 \cdot 10^{-4}$

b. Después, se multiplican los números de las cifras decimales.

$2,52 \cdot 1,4 \cdot 2,25 = 7,938$

c. Finalmente, se multiplican las potencias de 10.

$10^{-6} \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} = 10^{-17}$

El resultado es $\mathbf{7,938 \cdot 10^{-17}}$ **m**^{3}.

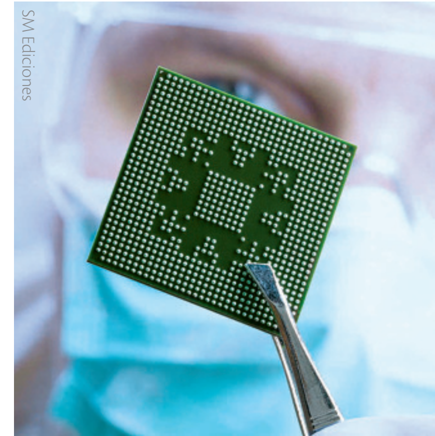


Figura 2

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1.

Notación decimal	Notación científica
0,00000038	
53 000 000	
0,000000000 25	
0,000000079	
62 500 000 000	

Tabla 1

3 Calcula.

a. $(4 \cdot 10^{-10})(3 \cdot 10^{5})$

b. $\dfrac{2,829 \cdot 10^{-11}}{3,45 \cdot 10^{-4}}$

c. 5 563,8 · 104 + 39,1 · 106 – 2,79 · 107

d. $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) \cdot 8,3 \cdot 10^{8}}{4,32 \cdot 10^{3}}$

4 Escribe en notación científica los siguientes datos.

a. La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente de 300 000 000 m/seg.

b. Un año luz es la longitud que recorre la luz en un año. Su valor es 9 460 000 000 000 km.

c. La distancia media de Saturno al Sol es de 141,8 millones de kilómetros.

d. La masa de un protón es:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 69 kg

e. El diámetro de un virus es 0, 000 000 026 7 m.

Razonamiento

5 Indica cuál de los siguientes números está escrito en el formato de notación científica.

a. $7,24 \cdot 10^{0,08}$ b. $0,724 \cdot 10^{7}$

c. $72,4 \cdot 10^{5}$ d. $7,24 \cdot 10^{6}$

Resolución de problemas

6 La luz viaja aproximadamente a $3 \cdot 10^{5}$ km por segundo. Si tarda cerca de $5 \cdot 10^{2}$ segundos en llegar a la Tierra, ¿cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?

7 Un cabello humano tiene un grosor de menos de 0,1 mm. ¿Cuánto ocuparían, a lo ancho, un millón de cabellos puestos en fila, uno al lado del otro? Expresa el resultado primero en milímetros, usando la notación científica, y luego en la unidad adecuada.

8 La energía total recibida desde el Sol cada minuto es de $1,02 \cdot 10^{19}$ calorías. Si el área de la Tierra es de $5,1 \cdot 10^{18}$ centímetros, ¿cuál es la cantidad de energía que recibe por centímetro cuadrado en un minuto (la constante solar)?

9 La velocidad del sonido en el aire es de $3,31 \cdot 10^{4}$ centímetros por segundo. Calcula esa velocidad en centímetros por hora.

10 Una persona tiene 5 litros de sangre y hay aproximadamente 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico. ¿Cuántos glóbulos rojos tiene una persona, aproximadamente? Expresa el valor en notación científica.

11 Raíz de un número real

Explora

Un depósito de agua en forma de cubo tiene una capacidad de 125 cm^3.

- ¿Cuál es la longitud de la arista del depósito de agua?

Para calcular la longitud de la arista del depósito de agua, es necesario hallar un valor tal que elevado al cubo dé como resultado 125.

Si se busca por ensayo-error, se evidencia esto:

$2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$

Entonces, la respuesta es 5, porque es el valor que elevado al cubo da 125 o, dicho de otra manera, la raíz cúbica de 125 es igual a 5. Se puede escribir de estas dos maneras:

Como potencia con exponente fraccionario	Como expresión radical
$(125)^{\frac{1}{3}} = 5$	$\sqrt[3]{125} = 5$

Tabla 1

11.1 Raíz enésima

La **radicación** es una de las operaciones inversas de la potenciación y cumple que para un número natural *n*, si $b^n = a$, *b* es la raíz enésima de *a*.

Ten en cuenta

Signo radical

Raíz

$\sqrt{a} = b$

Radicando

La radicación es una operación inversa de la potenciación, en donde se busca la base conociendo el exponente y la potencia.

Ejemplo 1

Según el valor del índice, las raíces se llaman cuadradas, cúbicas, cuartas, quintas, sextas... y, en general, raíces enésimas. Mira cómo se leen las siguientes raíces:

$\sqrt{3}$ Raíz cuadrada de 3.

$\sqrt[3]{125}$ Raíz cúbica de 125.

$\sqrt[3]{729}$ Raíz cuarta de 729.

11.2 Potencias con exponente fraccionario

Una **potencia de exponente racional** se puede expresar como un **radical** así:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Aquí: • El **índice del radical** equivale al **denominador** de la fracción.
• El **radicando** corresponde a la **base** elevada al **numerador**.

Ten en cuenta

Las potencias de exponente fraccionario cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Ejemplo 2

Las potencias $5^{\frac{1}{3}}$ y $27^{0,25}$ se pueden escribir como expresiones radicales. Observa:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \qquad 27^{0,25} = 27^{\frac{1}{4}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$$



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt02

Descubre una excelente herramienta para calcular raíces de números reales.

Ejemplo 3

Esta relación es útil para encontrar, por ejemplo, el resultado de $\sqrt{2^{12}}$. Observa:

Se expresa el radical como potencia: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}}$

Luego, se simplifica la fracción: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6$

Por último, se resuelve la potencia: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números reales no negativos aplicando las propiedades en R.

11.3 Propiedades de las raíces de números reales

El **producto** y el **cociente de radicales** del mismo índice se pueden expresar como otro radical que tiene por índice al índice común y por radicando al producto o el cociente de los radicandos.

En general: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplo 4

Observa cómo se calcula el siguiente producto y cociente entre radicales reales.

$$\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{2x \cdot 3y} = \sqrt[5]{6xy}$$

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}} = \sqrt[5]{\frac{2x}{y}}$$

La **potencia** de un radical es otro radical que tiene por índice el mismo índice y por radicando la potencia del radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt{a}\right)^{m \cdot n}$$

Ejemplo 5

Para resolver $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3$, se sigue este procedimiento:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{\left(x^2\right)^3} = \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$$

La **raíz** de un radical es otro radical que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo valor.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo 6

Observa cómo se soluciona la raíz de otra raíz $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$. Se multiplican los índices y se obtiene una sola raíz; después, se extrae la raíz indicada. Observa:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Ejemplo 7

Este es el procedimiento para extraer el máximo de los factores posibles de los radicales $\sqrt[3]{2000}$ y $\sqrt[3]{3125x^3}$.

Se descompone el radicando en factores primos y se expresan como potencia. Luego, se aplican las propiedades de los radicales.

- $\sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot 2\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{3125x^3} = \sqrt[3]{5^5 x^3} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2 x^3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}\,\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5^2} \cdot x$

En consecuencia: $\sqrt[3]{3125x^3} = 5x\sqrt[3]{25}$

Ten en cuenta

Para cualquier número real x y para un número entero positivo $n > 1$, se cumple esto:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{ si } n \text{ es par} \\ x, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ten en cuenta

La raíz de una adición o sustracción no es la suma o resta de las raíces.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Ten en cuenta

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede extraer afuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice.

11 Raíz de un número real

Con calculadora

En las calculadoras, la tecla ^ se usa para calcular la raíz de cualquier número de índice x. Por ejemplo: $\sqrt[4]{625}$ sería 4.

SHIFT ^ 6 2 5 EXE

4 x√625
5

Ten en cuenta

El número de raíces de un radical es:

- **Dos**, si el índice es par y el radicando es positivo.
- **Una**, si el índice es impar o el radicando es igual a 0.
- **Ninguna**, si el índice es par y el radicando es negativo.

Ten en cuenta

Un radical es irreducible cuando la fracción de la potencia asociada es irreductible.

Ejemplo 7

Este es el procedimiento que permite introducir un factor dentro de un radical.

Dada la expresión $2x\sqrt[5]{xy}$, para introducir al factor $2x$ en el radical, se escribe este factor dentro de la raíz, elevado al índice del radical. Se debe mantener el mismo índice en el resultado. Observa:

$$2x\sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{(2x)^5 xy} = \sqrt[5]{32x^5xy} = \sqrt[5]{32x^6y}$$

11.4 Radicales equivalentes

Dos o más **radicales** son **equivalentes** si tienen la misma raíz.

Una forma de verificarlo es ver que los exponentes de las potencias asociadas sean equivalentes. Además, si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[kn]{x^{km}}$$

Ejemplo 8

Las expresiones $3^{0,5}$, $\sqrt{3}$ y $27^{\frac{1}{6}}$, aparentemente distintas, son equivalentes. Observa:

$$3^{0,5} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$27^{\frac{1}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 9

Para saber si los radicales $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[6]{x^4}$ son equivalentes, se sigue este procedimiento:

1.° Los radicales se expresan como una potencia: $x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{4}{6}}$

2.° Se comprueba que las bases sean iguales.

3.° Se verifica que las fracciones de sus exponentes sean equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Por lo tanto, los dos radicales son equivalentes.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$ y $\sqrt[10]{5}$.

Solución:

Se elige como índice común 10, esto es, el m.c.m. (2, 5, 10) = 10.

$$\sqrt{3} = \sqrt[5\cdot2]{2^{1\cdot2}} = \sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10]{243};$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5\cdot2]{2^{1\cdot2}} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10]{32};\quad \sqrt[10]{5}$$

Entonces: $\sqrt[10]{32} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[10]{243}$

Luego: $\sqrt[5]{2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt{3}$

Destreza con criterios de desempeño: Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1.

Radical	Potencia	Resultado
$\sqrt{16}$		
$\sqrt[3]{8}$		
$\sqrt{25}$		
$\sqrt[3]{125}$		
$\sqrt{100}$		
$\sqrt[3]{729}$		
$\sqrt[3]{216}$		

Tabla 1

3 Identifica entre cuáles números enteros se encuentra la raíz cúbica de los números propuestos.

a. 174 b. 169 c. 225
d. 16 e. 1001 f. 30
g. 64 h. 125 i. 347

4 Simplifica extrayendo factores.

a. $\sqrt{50}$ b. $\sqrt[3]{128}$
c. $\sqrt[4]{162}$ d. $\sqrt[3]{16000}$

5 Introduce los factores en los radicales.

a. $2a\sqrt{5}$ b. $5x\sqrt[4]{2}$
c. $2\sqrt[3]{2}$ d. $2\sqrt[7]{2n}$

6 Suma los siguientes radicales.

a. $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$
b. $\sqrt{75} - \sqrt{147} - \sqrt{12}$
c. $\sqrt{175} + \sqrt{125} + 2\sqrt{28}$
d. $\sqrt{20} + \sqrt{45} + 2\sqrt{125}$

Razonamiento

7 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\sqrt{335} - \sqrt{39} - \sqrt{12}$
b. $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{5}$
c. $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{64} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{16}}}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^5}$

8 Realiza las siguientes operaciones expresando los radicales como potencias fraccionarias.

a. $2\sqrt[3]{5}$ b. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{18}}$
c. $\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$ d. $\dfrac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}}$

9 Simplifica las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[30]{16x^8}$ b. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{2}$
c. $\dfrac{10b^2c^2}{c\sqrt[3]{8b^4}}$ d. $\dfrac{4a^2}{2\sqrt{a}}$

10 Resuelve las operaciones indicadas utilizando las propiedades de la radicación.

a. $\left(\sqrt{8^2}\right)^4$ b. $\sqrt{32^3} \div \sqrt{16^3}$
c. $\sqrt{506}$ d. $\sqrt{\left(3^2\right)^3} \cdot \sqrt{36^3}$
e. $\sqrt{360} \cdot \sqrt{1000}$ f. $\left(\sqrt{20^2}\right)^5$

11 Reduce a índice común y ordena de mayor a menor cada grupo de radicales.

a. $\sqrt{5}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{3}$ b. $\sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{7}, \sqrt{2}$

12 Valida, en cada caso, si los radicales son equivalentes.

a. $\sqrt[5]{21}, \sqrt[10]{21^2}$ b. $\sqrt[4]{7^2}, \sqrt[30]{7^{15}}$
c. $\sqrt[8]{11^5}, \sqrt[7]{11^6}$ d. $\sqrt[3]{35^2}, \sqrt[12]{35^6}$

Resolución de problemas



13 Una sala de cine tiene igual número de filas que de columnas. Se venden todas las entradas para una sesión, obteniendo $ 392. Si se ha vendido cada entrada a $ 8, ¿cuántas filas tiene la sala?

14 Un arquitecto proyecta un galpón cuadrado de 400 m^2 de superficie, en un establecimiento industrial. Al cliente le parece exagerado y decide que el lado mida la mitad. ¿Cuántos metros cuadrados tendrá el nuevo galpón?

15 Calcula la medida de la diagonal de un rectángulo que mide 35 mm de alto y 56 mm de largo. Explica el procedimiento que seguiste.

12 Racionalización de denominadores

Explora

El área de un terreno rectangular es de $20\sqrt{2}$ m² y la longitud de uno de sus lados se representa con la expresión $\sqrt{32}$.

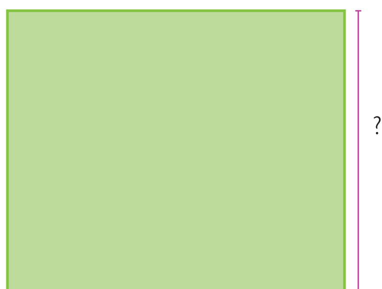


Figura 1

- ¿Cuál es la medida de la longitud del otro lado?

Para calcular la medida de uno de los lados del rectángulo, cuando se conoce el área y la medida del otro lado, basta con dividir el área entre la medida conocida. En este caso, se debe dividir $20\sqrt{2}$ m² entre $\sqrt{32}$.

En esta división podemos ver que el denominador es $\sqrt{32}$, un número irracional. Para poder resolver esta fracción lo mejor es buscar una fracción equivalente cuyo denominador sea un número racional. Este procedimiento se conoce como racionalización de denominadores.

Racionalizar una fracción con radicales consiste en conseguir una fracción equivalente donde su denominador sea racional. Si el denominador es un monomio de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$ y $u > o$, entonces en la fracción se multiplica tanto el numerador y el denominador por el factor $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Por lo tanto, para calcular la altura del cuadrado se procede así:

$$\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{20\sqrt{2 \cdot 32}}{32} =$$

$$\frac{20\sqrt{64}}{32} = \frac{20 \cdot 8}{32} \cdot \frac{160}{32} = 5$$

Se concluye que el terreno mide 5 m de alto.

Ejemplo 1

La expresión $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{9}}$ se puede escribir sin raíces en el denominador. Para esto, es necesario multiplicar el numerador y el denominador por el factor $\sqrt[3]{3}$, que reemplaza la raíz del denominador por un número entero. Observa:

$$\frac{6x^2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6x^2}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{6x^2}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6x^2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3}} = \frac{6x^2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{6x^2\sqrt[3]{3}}{3} = 2x^2\sqrt[3]{3}$$

Si el denominador es un binomio con radicales de índice 2, en la fracción se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 2

Para racionalizar la expresión $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, esto es $\sqrt{5}+\sqrt{3}$. Entonces:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{6}}{\sqrt{25}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{6}}{5-3} = \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{6}}{2}$$

Ten en cuenta

La expresión por la cual se multiplica otra para eliminar el radical se llama **"el conjugado de"**. Por ejemplo, el conjugado de es $\sqrt[3]{5}$ y el $\sqrt[3]{5^2}$ conjugado de $\sqrt{3}+1$ es $\sqrt{3}-1$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en R.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Racionaliza el numerador y el denominador de la expresión $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-3}$.

Solución:

Primero se racionaliza el numerador y después el denominador.

$$\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=\frac{\left(5-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(5+\sqrt{2}\right)}=\frac{25+5\sqrt{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{4}}{5\sqrt{2}+\sqrt{4}-15-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{25-2}{2\sqrt{2}+2-15}=\frac{23}{2\sqrt{2}-13}$$

$$\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=\frac{\left(5-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}=\frac{5\sqrt{2}+15-\sqrt{4}-3\sqrt{2}}{\sqrt{4}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-9}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+15-2}{2-9}=\frac{2\sqrt{2}+13}{-7}$$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el conjugado de cada expresión.

a. $\sqrt[3]{x^3y^2}$ b. $\sqrt[3]{(x-5)^2}$.

c. $\sqrt{2x}+\sqrt{3}$ d. $\sqrt{xy}-3z$

3 Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones y simplifica.

a. $\frac{1}{\sqrt[3]{2xy}}$ b. $\frac{6a}{\sqrt[3]{2a^2}}$

c. $\frac{3a^2}{\sqrt[4]{1-2a^2}}$ d. $\frac{2-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$

e. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ f. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4 Racionaliza el numerador de cada expresión y simplifica.

a. $\frac{\sqrt{4x}}{3}$ b. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{xa}}$

c. $\frac{\sqrt{x+3}-3}{x}$ d. $\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

Razonamiento

5 Explica por qué las siguientes expresiones son equivalentes.

a. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ b. $\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

6 Justifica cada paso del siguiente procedimiento.

$$\frac{\sqrt{2-a}}{4-a^2}=\frac{\sqrt{2-a}\,\sqrt{2-a}}{\left(4-a^2\right)\sqrt{2-a}}=$$

$$\frac{2-a}{(2-a)(2+a)\sqrt{2-a}}$$

7 Encuentra una expresión equivalente con radicales, del mismo u otro índice, para cada caso.

a. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$ b. $\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt[3]{27}}$

c. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2}}$ d. $\sqrt[3]{\frac{9a^2}{b^6}}$

8 Halla el error, si lo hay, en el siguiente procedimiento.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Resolución de problemas

9 El área de un rectángulo es $3\sqrt{3}$ cm² y su base mide $\sqrt{12}$ cm. Resuelve.

a. Calcula la medida de la altura del rectángulo.

b. Explica, paso a paso, el procedimiento que seguiste para llegar a tu respuesta.

Prueba Ser Estudiante



A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Para trasladarse desde la casa de Fanny hasta la de Paulina se debe pasar por $\frac{1}{3}$ del camino que es empedrado, $\frac{1}{4}$ adoquinado y el resto es pavimentado. Si la distancia entre las casas es de 1,2 km, el recorrido en el camino pavimentado corresponde a:

A. 0,8 km

B. 0,7 km

C. 0,5 km

D. 0,4 km

2. Con $\frac{1}{8}$ del dinero que me regalaron por mi cumpleaños compré 8 carritos a $1,50 cada uno. ¿Cuánto dinero me queda?:

A. $96

B. $88

C. $84

D. $72

3. Un barco pesquero recolecta 800 kg de atún, si $\frac{1}{25}$ de la pesca se pierde y el resto se congela en cajas de 48kg. La cantidad de cajas que se necesitarán es de:

A. 22

B. 16

C. 15

D. 12

4. Fabián tiene $\frac{1}{5}$ menos de dinero del que tiene Vinicio y Vinicio $\frac{1}{8}$ más de lo que tiene Carlos, si Carlos tiene $120 entonces Fabián tiene:

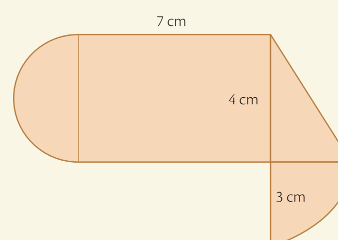
A. $128

B. $135

C. $162

D. $170

5. El perímetro de la figura es:



A. $14 + 2\pi$

B. $22 + \frac{7}{2}\pi$

C. $19 + \frac{5}{2}\pi$

D. $20 + \frac{3}{2}\pi$

6. Luisa se propone caminar diariamente aumentado a su recorrido 20m más que lo que recorrió el día anterior. Si el primer día recorrió 600m, ¿cuánto recorre al final de la primera quincena?

A. 700m

B. 780m

C. 800m

D. 880m

7. En un proceso biológico de multiplicación celular se nota que la célula entra en una bipartición cada 10 minutos, al cabo de una hora y media, el número de células es de:

A. 512

B. 506

C. 466

D. 256

8. La rueda de un auto es de 60cm, si en un trayecto ha dado 500 vueltas, el recorrido es de:

A. 300m

B. 600m

C. 942,5m

D. 1 884,9m

Indicadores de logro:

- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales y reales.
- Aplica las operaciones con números reales en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números reales.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.
- Aproxima decimales, en la simplificaión de expreciones numéricas.
- Emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños .

9. Los números cuyo cociente es 2, 344 44… son:

A. 211 y 90

B. 233 y 900

C. 200 y 99

D. 234 y 990

10. Se desea envasar 600 litros de aceite de oliva, la mitad en botellas de $\frac{1}{4}$ de litro y la otra mitad en botellas de $\frac{1}{2}$ litro. El total de botellas utilizadas es:

A. 1 800 botellas

B. 1 200 botellas

C. 800 botella

D. 600 botellas

11. Un comerciante debe vender cuatro litros y medio de miel en frascos de un octavo de litro. El número de recipientes que obtuvo es de:

A. 72

B. 36

C. 32

D. 28

12. La fracción equivalente de 2,44 es:

A. $\frac{200}{50}$

B. $\frac{61}{25}$

C. $\frac{244}{99}$

D. $\frac{(200-2)}{9}$

13. La fracción equivalente de 1, 466 666… es:

A. $\frac{146}{9}$

B. $\frac{100}{90}$

C. $\frac{140}{99}$

D. $\frac{22}{15}$

14. La luz viaja aproximadamente a $3 \cdot 10^5$ km por segundo. La velocidad en centímetros por hora es.

A. $1.08 \cdot 10^{-3}$

B. $1.08 \cdot 10^{14}$

C. $1.08 \cdot 10^{-2}$

E. $1.08 \cdot 10^{13}$

15. El valor exacto de 0,25 + 3/4 + 0,2 + 1/5 es:

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{(-5)/2}{2}$

D. $\frac{(-5)/2}{3}$

16. El resultado luego de $\left(\left(\frac{\sqrt[6]{7^5}\,\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[4]{7^3}}\right)^3\right)^2$ es:

A. $\sqrt[6]{7^5}\,\sqrt[3]{2^2}$

B. $\sqrt[3]{7}\,\sqrt[5]{2^{25}}$

C. $\sqrt[3]{7^3}\,\sqrt[5]{2^{21}}$

D. $\sqrt{7}\,\sqrt[5]{2^{27}}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Conoce qué son los bienes y servicios



El dinero es todo medio de cambio y de pago generalmente aceptado por la sociedad. Este simplifica extraordinariamente los intercambios. En las sociedades contemporáneas, el uso del dinero permitió que, del intercambio de bienes por bienes, se pasara al intercambio de bienes por dinero.

Los bienes y servicios representan un término importante en los principios de la economía y por tanto hay definiciones claras de lo que es y de su clasificación. Aunque estos términos algunas veces resultan complejos de comprender, es importante tener claridad sobre lo que ellos significan.

Los bienes

Son cosas tangibles que pueden consumirse; son todas las cosas aptas para la satisfacción de las necesidades humanas y son producidas por el trabajo. Por ejemplo la ropa y los alimentos.

Los servicios

Son acciones que las personas realizan; actividades que van dirigidas a satisfacer necesidades humanas. Son trabajo improductivo porque no generan valor, no producen valor y, por tanto, son servicios inmateriales. Por ejemplo, un corte de cabello, un servicio de limpieza, el servicio de transporte, los servicios financieros, entre otros.



Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1 Lee la siguiente información:

Es posible clasificar los bienes y los servicios; se inicia en un grupo, cada grupo tiene un segmento, cada segmento una familia, cada familia una clase y cada clase un producto. Observa, por ejemplo:

Grupo	Servicios
Segmento	Servicio de salud, servicios educativos y de formación
Familia	Instituciones educativas
Clase	Escuelas elementales y secundarias
Producto	Escuelas privadas de educación primaria y secundaria

2 Investiga acerca de otros segmentos, familias, clases y productos del grupo de servicios. Construye un cuadro que resuma la información y explícalo.

3 Elabora una lista de los servicios a los que accedes a diario. Clasifícalos en públicos o privados. Luego, junto con tus compañeros hagan un listado de los servicios que tienen en su sector.

Entre otras clasificaciones, los bienes económicos pueden ser:

Bienes de consumo

Son aquellos que sirven directamente para satisfacer necesidades humanas y se subdividen en:

- **De uso único:** son aquellos que se agotan en un solo uso, es decir se extinguen inmediatamente de satisfacer la necesidad; un ejemplo son los alimentos.
- **De uso durable:** son aquellos que al ser usados y brindar satisfacción de las necesidades no se extinguen inmediatamente, son durables en el tiempo y tienen un periodo de vida útil ; por ejemplo, los muebles, artefactos del hogar y la ropa.

Bienes de producción

Son los bienes que sirven para producir otros bienes, sean éstos de consumo o producción. Estos bienes se subdividen en:

- **De uso único:** son los bienes que en el proceso de producción pasan a formar parte del nuevo bien, perdiendo su cualidad inicial. Entre estos bienes están las materias primas y los insumos.
- **De uso durable:** son aquellos bienes que en el proceso productivo son durables y tienen un tiempo de vida útil, tales como las maquinarias, los equipos de producción, las herramientas, etc.

Los servicios se pueden clasificar así:

1 Según quién los gestiona

- **Públicos:** están gestionados por el Estado. Estos servicios tienen un fin social, no económico. Dentro de este tipo de servicios se encuentra la salud, el orden público, la educación, entre otros.
- **Privados:** Están gestionados por empresas privadas y su objetivo principal es obtener una compensación económica. Algunos de ellos son:

2 Según la función que desempeñan

- **Sociales:** satisfacen algunas necesidades de la sociedad: educación, sanidad, entre otros.
- **Administrativos:** se encargan de diversas funciones, tales como la gestión y el tramite de documentos.
- **Financieros:** todas aquellas entidades que se encargan de gestionar operaciones monetarias.
- **Culturales:** abarcan servicios relacionados con el arte, el cine, etc...
- **Personales:** todo aquel servicio desempeñado por un profesional.
- **Comerciales:** servicios relacionados con la compra y venta de productos
- **Transporte:** se ocupan de facilitar el movimiento de personas y mercancías de un lugar a otro.
- **Ocio y turismo:** abarcan todas las actividades que tienen como fin la diversión y el descanso de sus consumidores.

Pregunta tipo Saber

La familia Martínez pagó el mes de mayo $125 por el servicio de agua; $101 por el servicio de luz y $44 por el servicio de teléfono.

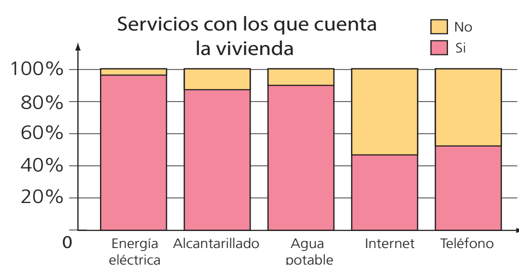

SM Ediciones

Para el mes de Junio el señor Martínez observó un incremento del 25% en cada una de las facturas. Teniendo en cuenta esta información es correcto afirmar que:

A. Se pagaron $ 25 por el agua.
B. En total, los servicios aumentaron aproximadamente $ 70.
C. La luz y el gas aumentaron proporcionalmente más que el agua.
D. En el mes de junio se pagó en total por los servicios $ 271.

Administración de recursos

4 Observa la gráfica y escribe algunas conclusiones en relación con los servicios ofrecidos en la misma.



Trabajo en grupo

5 Escriban de qué manera pueden hacer uso racional de los siguientes servicios:

- Servicio de Agua
- Servicio de Luz
- Servicio de Telefonía


SM Ediciones

6 Respondan la siguiente pregunta:

- ¿Por qué es importante ahorrar en el uso de los servicios públicos?

Habilidades digitales

Organiza la información con Prezi

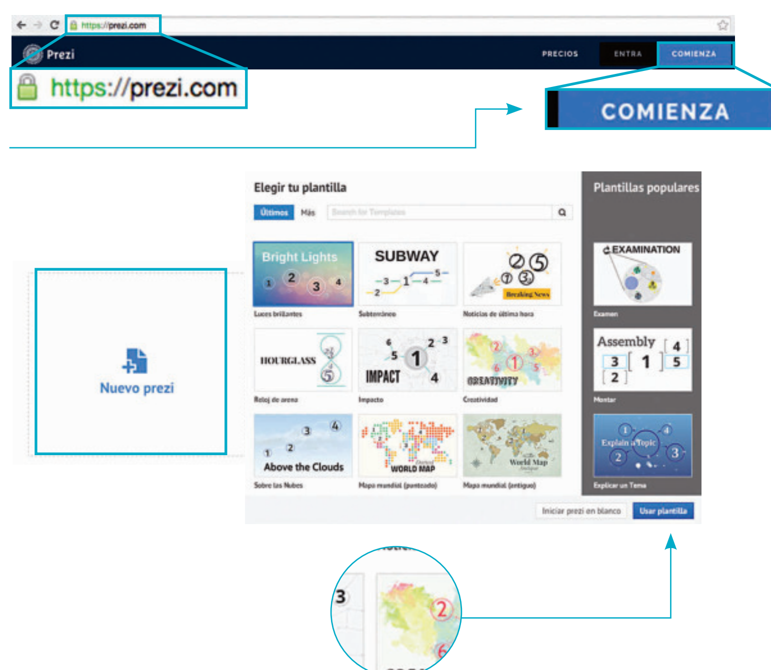
Organizar y presentar información de manera agradable y atractiva es posible con la ayuda de Prezi. Esta herramienta multimedial te permite realizar presentaciones en línea con plantillas animadas y divertidas. En esta actividad aprenderás a realizar una presentación, aprovechando el alto potencial de Prezi.

1 Ingresa a Prezi

a. Busca la dirección electrónica https://prezi.com. Da clic sobre el botón Comienza y selecciona la opción "gratuita" (si ya tienes una cuenta en Prezi, da clic en "Entra" e ingresa tu correo y contraseña).

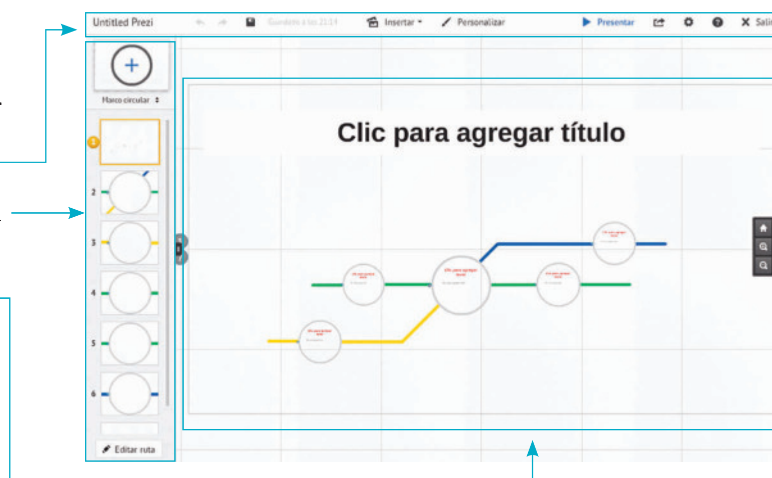
b. Crea tu cuenta con tus datos y luego pulsa en la opción "Crear una cuenta pública gratis".

c. Elige la opción "Nuevo Prezi" y luego la plantilla que más te guste; finalmente, da clic sobre la opción "Usar plantilla".



2 Reconoce el entorno de Prezi

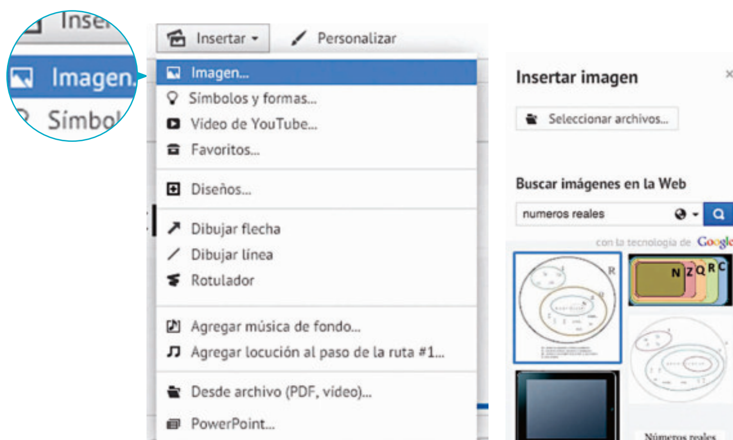
1. Barra de herramientas.
2. Barra de edición de ruta para cada diapositiva.
3. Zona de trabajo.



3 Crea una presentación

a. Realiza una búsqueda de información confiable en Internet (textos, imágenes, videos, documentos) sobre las propiedades de los números reales y sus operaciones.

b. Usa las barras de herramientas de Prezi para insertar las imágenes seleccionadas y la zona de trabajo para incluir textos cortos.

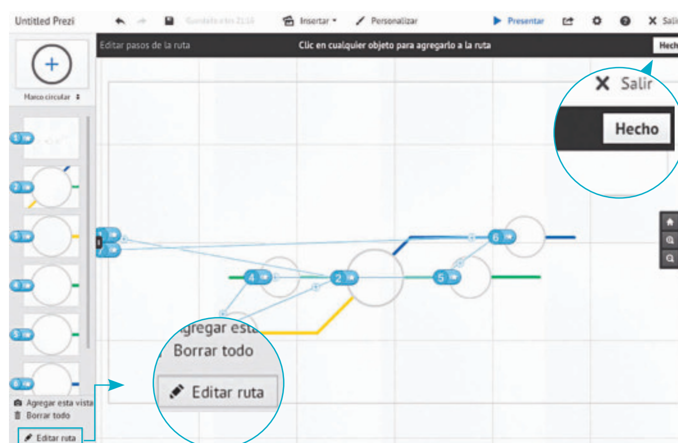


4 Edita tu presentación

a. Da clic en el botón “Editar ruta” para elegir el orden y la dinámica de cada diapositiva.

b. Oprime el botón “Hecho” una vez finalices el proceso anterior.

c. Rectifica la presentación con ayuda de la opción “Presentar”, ubicada en la barra de herramientas.

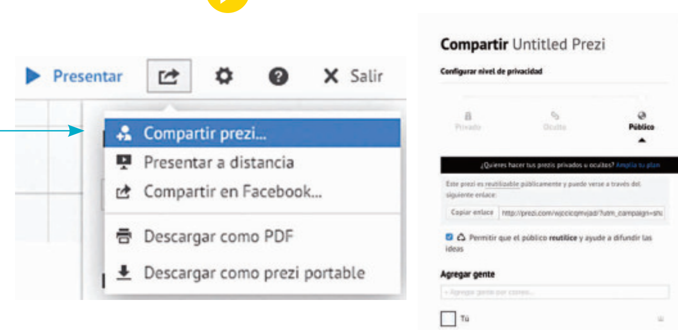


5 Edita tu presentación

a. Oprime el botón .

b. Selecciona la opción “Compartir Prezi”.

c. Agrega los correos de tus compañeros de clase con el rol de “Observador”.



Mejora tu presentación. En la barra de herramientas de Prezi, oprime el botón Insertar y luego la opción “Video de YouTube”.

Copia y pega la dirección del video que desees incluir y, finalmente, da clic en Insertar.



Evaluación de la Unidad



Números racionales

Comunicación

1. Responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta.

a. ¿Cero es un número racional?

b. ¿Por qué el conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales?

Expresiones, fraccionaria y decimal, de un número racional

Ejercitación

2. Establece, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Todos los números decimales mixtos son periódicos. ( )

b. Todos los números racionales se pueden expresar como números decimales. ( )

c. El número $\frac{21}{4}$ es mayor que 5,25. ( )

d. Las fracciones decimales tienen como denominador un múltiplo de 10. ( )

e. Todos los números naturales pueden expresarse como decimales periódicos. ( )

Números racionales en la recta numérica

Razonamiento

3. Organiza de menor a mayor los siguientes números.

$-3{,}21$ $\quad -3{,}011$

$-\frac{78}{25}$ $\quad -3{,}4$

$-\frac{151}{50}$ $\quad -3{,}04$

$-\frac{669}{200}$ $\quad -3{,}115$

$-\frac{55}{18}$ $\quad -\frac{331}{100}$

Operaciones con números racionales

Modelación

4. A una excursión asisten 136 personas. Si se armaron once equipos y cuatro personas quedaron por fuera, ¿cuántas personas hay en cada equipo?

Resolución de problemas

5. Las dos terceras partes de un terreno se utilizan para sembrar cebolla y un quinto del resto del terreno para sembrar lechuga. Si quedaron sin sembrar 200 m^2, ¿cuál es el área del terreno?

Números irracionales

Razonamiento

6. El número *pi* (π) representa la constante que relaciona el perímetro de una circunferencia con respecto a la longitud de su diámetro.

$$\pi = \frac{\text{(Perímetro de la circunferencia)}}{\text{(Diámetro de la circunferencia)}}$$

Si *pi* puede expresarse como una fracción, ¿por qué es un número irracional?

Números reales

Razonamiento

7. Simplifica la expresión e indica la respuesta correcta.

$$\left\| 4 - \sqrt{25} \right| - (-3)^2 + \sqrt[3]{-1} \right\|$$

a. 7 $\quad$ b. 9

c. 11 $\quad$ d. 19

Intervalos y semirrectas

Ejercitación

8. Representa cada expresión mediante una desigualdad e identifica su intervalo.

a. El peso de una caja es mayor que 3,5 kg y menor que 5,6 kg.

b. Una deuda de \$ 500 000.

c. La variación de la temperatura está entre −2 °C y 2 °C.

d. El producto de dos números positivos es mayor o igual que 7.

e. El volumen de un cuerpo varía entre 6 cm^3 y 18 cm^3.

Indicadores de logro:

- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales y reales.
- Aplica las operaciones con números reales en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números reales.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.
- Aproxima decimales, en la simplificaión de expreciones numéricas.
- Emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños.

Aproximación de números reales

Modelación

9. Resuelve las operaciones, aproxima el resultado a las centésimas y relaciona las expresiones correctamente.

a. $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} - \frac{2}{3}$ • 2,57

b. $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 0{,}595$ • 2,55

c. $\sqrt{3} + \frac{2}{3} - 0{,}086$ • 2,32

d. $\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ • 2,56

e. $\sqrt{2} - \frac{3}{20} + 1{,}3$ • 2,31

Operaciones con números reales

Ejercitación

10. Calcula el perímetro de la Figura 1.

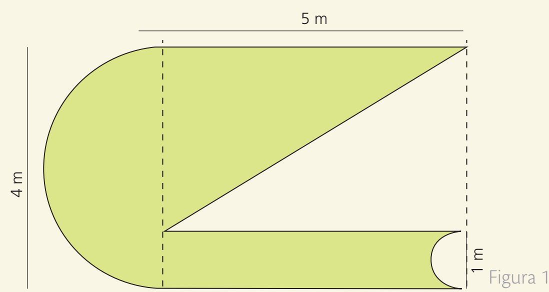


Figura 1

Resolución de problemas

11. Una rueda tiene un diámetro de 15 cm y recorre un camino recto a velocidad constante. Completa la tabla con la distancia recorrida al completar el número de giros.

Giros	3	5	8	9	10
Distancia					

Tabla 1

Potencia de un número real

Razonamiento

12. Al invertir $ 800 durante *n* meses, a una tasa de interés (*i*) del 0,32% mensual, el valor futuro de la inversión se calcula mediante la siguiente expresión:

$$S = 800\ (1+i)^n$$

Determina el capital que habrá a los cuatro años.

Resolución de problemas

13. El número de individuos en una población de bacterias, después de *t* horas, está dado por la expresión $p = 3^{2x}$. Determina el número inicial de bacterias y completa la tabla.

Horas	1	3	4	6	7
Población					

Tabla 2

Notación científica

Modelación

14. La masa de un átomo de carbono es aproximadamente 0,000 000 000 000 000 000 000 019 9 g. Expresa el número en notación científica.

Razonamiento

15. Determina la expresión equivalente a esta fracción.

$$\frac{0{,}000\,000\,842\,1}{1\,000\,000\,000\,000}$$

a. $8\,421 \times 10^{-2}$ b. $8\,421 \times 10^{2}$

c. $8{,}421 \times 10^{-19}$ d. $8{,}421 \times 10^{19}$

Raíz de un número real

Ejercitación

16. Determina en cada caso si el elemento pertenece (∈) o no pertenece (∉) al conjunto.

a $\sqrt[5]{32}$ ☐ ℕ

b. $\sqrt[3]{-1}$ ☐ ℕ

c. $\sqrt{-24}$ ☐ ℝ

d. $\sqrt[3]{9}$ ☐ ℚ

e. $\sqrt{-4}$ ☐ ℤ

f. $\sqrt[4]{\pi^2}$ ☐ 𝕀

g. $-\sqrt[3]{-27}$ ☐ ℕ

h. $\sqrt{10}$ ☐ ℚ

i. $\sqrt{\sqrt{81}}$ ☐ ℚ

j. $\sqrt{28}$ ☐ ℝ

2 Polinomios

BLOQUE

Álgebra y funciones

El uso de símbolos para denotar incógnitas junto con las operaciones entre números ha permitido desarrollar conceptos y demostrar relaciones y propiedades geométricas y algebraicas. Gracias al desarrollo del lenguaje algebraico, hoy en día es posible comunicar ideas y conceptos universales.

- Expresa una propiedad de alguno de los conjuntos numéricos vistos, haciendo uso del lenguaje algebraico.

Cultura del Buen Vivir

La comunicación

Una manera de mantener buenas relaciones en todos los ámbitos de la vida es con una comunicación efectiva, que invite al entendimiento y la conciliación.

- Nombra cuatro aspectos que te permitan tener una buena comunicación con las personas que te rodean.

Aprenderás...

- Polinomios
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación y división de polinomios
- Productos y cocientes notables

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E

APPLICA © EDICIONES SM

SM Ediciones

Habilidades lectoras

¿*Do you speak* Álgebra?

El Álgebra ya existía antes de que se utilizaran variables y símbolos para escribir expresiones matemáticas. Se llamaba "Álgebra Retórica" porque las expresiones se describían con el idioma local.

En lugar de utilizar $2x + 1$, se escribía "dos veces *la cosa* más uno". Obviamente, solo las personas que conocían el idioma podían comprender el enunciado matemático.

Fue François Viète (1540-1603), un abogado y jurista francés, miembro del Parlamento y hombre de confianza del rey Enrique IV de Francia, cuya verdadera vocación eran las matemáticas, quien llevó al Álgebra a su fase simbólica tal y como hoy se utiliza.

Viète introdujo la primera notación algebraica en su libro *Introducción al arte analítico*, publicado en 1571. En él demostró el valor y la utilidad de los símbolos, abandonó el uso de palabras en el Álgebra y utilizó en sus cálculos las letras minúsculas latinas (vocales que representaban magnitudes desconocidas y consonantes que representaban magnitudes conocidas); además, introdujo la palabra "coeficiente" en uno de sus problemas geométricos.

Viète mejoró la teoría de ecuaciones y presentó métodos para resolver ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Sin embargo, no las resolvía tal como se hace en la actualidad, sino que las asociaba a problemas geométricos, aplicando lo que él llamaba "el principio de homogeneidad".

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 9.

Actividades

Interpreta

1. ¿En qué consistía el Álgebra Retórica?
2. ¿Cuál fue el aporte de Francois Viète al desarrollo del Álgebra?

Argumenta

3. ¿Cómo crees que el uso de variables y símbolos, en lugar de palabras, favoreció la evolución del lenguaje algebraico?
4. ¿Se te ocurriría otra manera de referirte a los valores desconocidos en una expresión algebraica? Explica.

Propón

5. Inventa palabras para decir "más", "menos", "por", "incógnita" y una palabra para cada número. Luego, escribe tres polinomios y tradúcelos a tu idioma.

1 Expresiones algebraicas

Explora

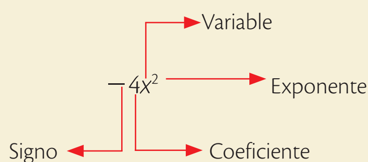
Una empresa de aseo tiene varias tarifas. En una oficina cobra a $ 35 la hora y en un hotel cobra a $ 10 más la hora.



- ¿Cuáles serían las expresiones que se obtienen de esta situación?

Ten en cuenta

Cada término consta de:



Ten en cuenta

La igualdad entre dos expresiones algebraicas se llama **ecuación algebraica**.

Para moldear la situación, determinaremos a t como el tiempo en horas del servicio prestado, pues esto nos permite traducir la situación de la siguiente manera:

Prestación de servicio en oficina	Prestación de servicio en hotel
$35 \cdot t$	$35 \cdot t + 10 \cdot t$

Teniendo en cuenta las expresiones, podemos averiguar cuánto dinero debe cobrar la empresa según las horas de servicio prestado.

Una **expresión algebraica** es una combinación de cantidades numéricas y literales, relacionadas por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las letras reciben el nombre de **variables**.

Ejemplo 1

Las siguientes expresiones son algebraicas:

$$2x^3 + 5xy \qquad \sqrt{a - 3ab} \qquad \frac{\sqrt{m+n} - 4}{(m+3)^2 - \sqrt{m}}$$

1.1 Tipos de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican según las operaciones que intervienen. Así:

- **Expresiones algebraicas enteras**: en ellas intervienen las operaciones básicas y los exponentes de las variables son números enteros positivos.

Ejemplo 2

Estas son expresiones algebraicas enteras: $6x - 58z$, $\frac{2x-1}{-2}$ y $2x^2 - 4xy^2 + 6y^3$.

- **Expresiones algebraicas racionales:** tienen algunas variables en el denominador.

Ejemplo 3

Estas son expresiones algebraicas racionales: $2a^{-5} + 7$ y $5x + \frac{3}{y}$.

- **Expresiones algebraicas irracionales:** contienen expresiones radicales en sus términos o variables con exponente racional no entero.

Ejemplo 4

Estas son expresiones algebraicas irracionales: $5m + 8\sqrt{a}$ y $-\frac{1}{3}y^2 - z^{\frac{1}{5}}$.

1.2 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene de sustituir las letras de la expresión algebraica por números determinados y aplicar las operaciones indicadas en la expresión.

Ejemplo 5

El volumen de una esfera se representa por la expresión algebraica $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Calcular el volumen de la esfera cuando el radio es 5, significa determinar el valor numérico cuando $r = 5$. Así: $\frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{4\pi(125)}{3} = \frac{500\pi}{3}$.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el valor numérico de $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{4b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2}{8b}} + ab + \dfrac{a}{b}$, para $a = 4$ y $b = 2$.

Solución

- Se sustituyen las variables por los valores dados, es decir, por $a = 4$ y $b = 2$. Después, se aplican las operaciones correspondientes.

$$\dfrac{\dfrac{4^2}{2^2} + \dfrac{4 \cdot 2^2}{4^2}}{\dfrac{4^2}{8 \cdot 2}} + 4 \cdot 2 + \dfrac{4}{2} = \dfrac{\dfrac{16}{4} + \dfrac{16}{16}}{\dfrac{16}{16}} + 8 + \dfrac{4}{2} = \dfrac{4+1}{1} + 8 + 2$$

$$= 5 + 8 + 2 = 15$$

Ten en cuenta

Para calcular el valor numérico se siguen estos pasos:

1. Se efectúa toda operación que se encuentre entre paréntesis.
2. Se efectúan todas las operaciones de multiplicación o división en el orden que se presenten de izquierda a derecha.
3. Se efectúan las sumas y las restas en el orden de izquierda a derecha.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a cada uno de los enunciados:

Enunciado	Expresión algebraica
a. El 20% de un número.	
b. El área de un triángulo de 9 cm de altura y base desconocida.	
c. El doble de la edad que tendré dentro de seis años.	
d. El área de un rectángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.	
e. La diferencia de los cuadrados de dos números.	
f. El producto de dos números pares consecutivos.	

Tabla 1

Razonamiento

3 Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, sabiendo que $x = -2$, $y = 3$ y $z = 4$.

a. $3x^2y - 2xy^2$

b. $-\dfrac{1}{2}x^3y^2 + 3x^2z^2$

c. $x^2(y - 2) - y(x + 2) + 3y^3$

d. $\dfrac{2}{3}x^3y^2z - 5x^2y^3z^2 + 10$

e. $\dfrac{3}{4}xy^2z^3 - x^2y^3z^2 + x^3y^2z^3 - \dfrac{1}{2}$

4 Observa las figuras y plantea la expresión algebraica correspondiente a su perímetro.

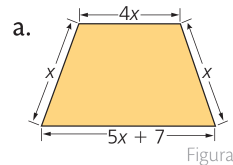
a. 

Figura 1

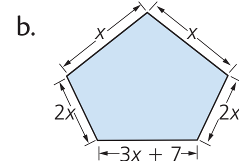
b. 

Figura 2

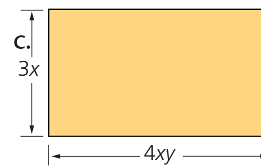
c. 

Figura 3

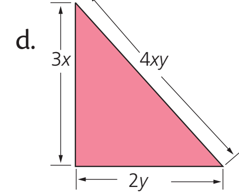
d. 

Figura 4

Resolución de problemas

5 Luz tiene dos años más que Lucas. Si x representa la edad actual de Lucas, ¿cuál es la expresión algebraica para la suma de las edades de ambos dentro de un año?

6 Si y es el número de carros que hay en un estacionamiento y x el número de motos, ¿cuál es la expresión algebraica que indica el número de ruedas que hay en total?

7 La energía potencial almacenada por un cuerpo ubicado a cierta altura sobre el suelo, está dada por la expresión $Ep = mgh$, donde m es la masa, g es la gravedad ($g = 9{,}8$) y h la altura.

- Según esta información, completa la Tabla 2

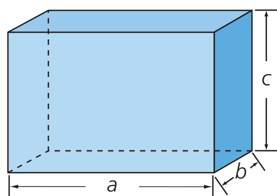
Ep				
m	0,2 kg	0,5 kg	0,75 kg	0,8 kg
h	1,5 *m*	2 *m*	0,8 *m*	1,2 *m*

Tabla 2

2 Polinomios

Explora

Observa las dimensiones de las siguientes figuras geométricas.



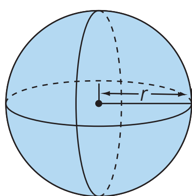


Figura 1

- ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo y el área de la circunferencia máxima de la esfera?

2.1 Monomios

Para el paralelepídedo y la esfera de la Figura 1, se tiene lo siguiente:

Volumen $= abc$ Área $= 4\pi r^2$

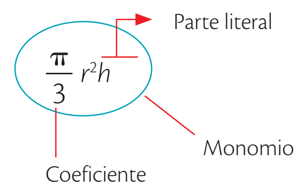
Las fórmulas abc y $4\pi r^2$ forman parte de las expresiones algebraicas más sencillas, llamadas monomios.

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un solo término, formado por el producto de números reales y las potencias de exponente natural de una o más variables.

Elementos de un monomio

Un monomio está formado por:

- Un **coeficiente**, que es la parte numérica.
- Una **parte literal**, constituida por variables y sus exponentes naturales



El **grado absoluto** de un monomio corresponde a la suma de todos los exponentes de las variables.

Si dos o más monomios tienen el mismo grado absoluto, son **homogéneos**. Por el contrario, si los monomios tienen diferente grado absoluto, se denominan **heterogéneos**.

Ten en cuenta

El grado de un monomio con respecto a una variable o grado relativo es el exponente de la variable. Por ejemplo, en el monomio $27ab^3$, el grado relativo a la variable b es 3 y con respecto a la variable a es 1.

Ejemplo 1

Al analizar si las expresiones $-\frac{7}{5}x^3y^4$, $\sqrt{11}\,a^{-3}b$ y $\frac{4}{m^2}$ son monomios, se concluye:

- $-\frac{7}{5}x^3y^4$ es un monomio, porque tiene dos variables, x, y, el coeficiente, $-\frac{7}{5}$ es un número real y los exponentes, 3 y 4, son números positivos.
- $\sqrt{11}a^{-3}b$ no es un monomio, ya que el exponente de la variable a es un entero negativo.
- $\frac{4}{m^2}$ no es un monomio, porque $\frac{4}{m^2}$ es igual a $4m^{-2}$ y, entonces, el exponente de m es un entero negativo.

Ejemplo 2

El grado absoluto de $-3ab^2$ es 3 y el de $5x^3y^2$ es 5. Luego, se concluye que los monomios $-3ab^2$ y $5x^3y^2$ son heterogéneos, ya que los grados absolutos de ambos monomios son diferentes.

2.2 Monomios semejantes

Si los monomios tienen la misma parte literal, se dice que son **monomios semejantes**. Por lo tanto, dos monomios semejantes solo se diferencian en el coeficiente.

Ejemplo 3

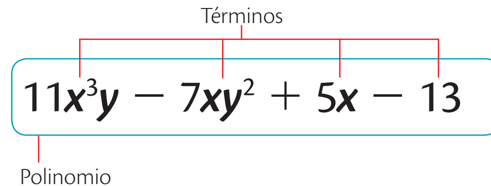
$3ax^4y^5$, $2ax^4y^5$, $2ax^4y^5$, $-\frac{7}{5}ax^4y^5$ son monomios semejantes. Por su parte, axy^3, $3a^2x^4y^5$, $-2bx^4$ no son semejantes a los anteriores.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer los elementos de un polinomio

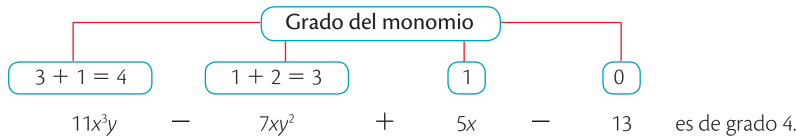
2.3 Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma entre varios monomios no semejantes.

Los monomios que conforman un polinomio se denominan **términos** del polinomio.



El **grado absoluto** de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que contiene el polinomio.



Un polinomio recibe un nombre según la cantidad de términos que tiene. Así, si el polinomio tiene dos o tres términos, se le denomina **binomio** o **trinomio**, respectivamente. Cuando un polinomio tiene más de tres términos, se le denomina simplemente **polinomio**.

Ejemplo 4

Estos son ejemplos de binomios, trinomios y polinomios:

- binomios: $x^2 + 9$ y $162 - 2x$
- trinomios: $8m^2 + 26m - 24$ y $3a^2 + 8a + 5$
- polinomios: $2x^5y^2 + 3x^4y - 2x^3 - 2$ y $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

2.4 Reducción de términos semejantes en un polinomio

Los **términos semejantes** en un polinomio son los monomios que tienen su parte literal exactamente igual, es decir, son monomios semejantes.

Por ejemplo, $2a^3b^4$ y $27b^4a^3$ son términos semejantes.

Reducir términos semejantes en un polinomio significa agrupar en un solo monomio a los que sean semejantes. Para ello, se efectúa la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejemplo 5

En el polinomio $2x^3y^4 + 3x^2y - 5xy + 3y^4x^3 + 4xy$, los términos $2x^3y^4$ y $3y^4x^3$ son semejantes, al igual que los términos $-5xy$ y $4xy$.

Después, se reducen los términos semejantes de la siguiente manera:

$2x^3y^4 + 3y^4x^3 = 5x^3y^4$

$-5xy + 4xy = -xy$

Finalmente, el polinomio reducido queda así: $5x^3y^4 + 3x^2y - xy$.

Ten en cuenta

El término independiente de un polinomio es el término de grado 0 en el polinomio, es decir, la constante.

Ten en cuenta

El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable es el mayor exponente que tiene la variable en el polinomio.

Así, en $-3ab + 4a^3$, el grado relativo del polinomio con respecto a *a* es 3.

Ten en cuenta

Un **polinomio** se llama **ordenado** si los términos que lo conforman están escritos de mayor a menor grado o viceversa.

2 Polinomios

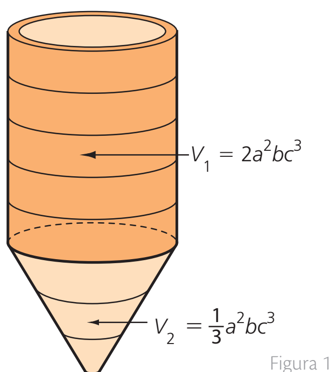


Figura 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Dado el sólido de la Figura 1, calcula su volumen total.

Solución

El volumen total V del sólido de la Figura 1 se calcula de esta manera:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3$$

Como los términos $2a^2bc^3$ y $\frac{1}{3}a^2bc^3$ son semejantes, entonces el volumen del sólido se puede expresar como un único término algebraico. Así:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)a^2bc^3 = \frac{7}{3}a^2bc^3$$

Este resultado es un monomio de coeficiente $\frac{7}{3}$ y de parte literal a^2bc^3; su grado absoluto es 6, mientras que el grado relativo con respecto a c es 3.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$-2x^3y^2$			
$-a^3bz^4$			
πm^4n^6			
$\frac{5}{3}x^2y^5z^3$			
$0{,}5a^4b^5c$			

Tabla 1

3 Determina cuántos términos tiene cada polinomio. Luego, establece si es binomio, trinomio o polinomio.

a. $5m^2n - 3\,mn + 8$

b. $26x^3y^2 - 7x^2y$

c. $a^6b^5 + a^5b^4 - 2a^4b^5 + 4a^3b^4 - a^2b^5$

d. $p^2q - pq^2 - 1$

e. $\frac{1}{2}y^2x^4 - \frac{3}{5}x^3y^3 + \frac{1}{3}y^4x^2 - \frac{5}{6}$

4 Determina si los siguientes monomios son homogéneos o heterogéneos.

a. $7a^2b^3$ y $-2x^2y^3$

b. $-3m^6n^4p$ y $3x^7y^5$

c. $11p^3q^2r$ y $11pq^2r^4$

d. $\sqrt{3}\,h^3r^2$ y $\sqrt{3}\,rh^4$

e. $\frac{1}{3}x^2y^4$ y $\frac{4}{3}xy^3$

f. $-\frac{4}{5}s^3t$ y $\frac{6}{5}s^2t^2$

5 Escribe un monomio semejante a cada monomio.

a. $-11abc$

b. $13x^4y^5$

c. $5p^2q^4$

d. $27m^7n^3$

e. $12m^3n^2$

f. $-8\,z^5n^4$

6 Determina cuántas y cuáles variables diferentes tiene cada polinomio.

a. $5x^3 - 2x^2 + x - 7$

b. $3x^4y + 6x^3y^2 - 8x^2y^2 + 5xy^4$

c. $5pq^4 + 3p^2q^3 - 7p^3q^2 + r$

d. $-7m^5 + \frac{1}{2}m^4 - m^3 + \frac{1}{3}m^2 - 1$

e. $\frac{2}{3}a^4b^3c^2 + \frac{1}{4}a^3b^4c^4 - 2d$

7 Dado el polinomio $7y^4 - 3y^3 - y^2 + y - 8$, indica lo siguiente.

a. El coeficiente del segundo término.

b. El coeficiente del tercer término.

c. El exponente de la variable en el cuarto término.

d. El término independiente.

8 Suprime los signos de agrupación y reduce los términos semejantes.

a. $2x - 3\{x + 2[x - (x + 5)] + 1\}$

b. $3y^2 - 2\{y - y[y + 4(y - 3)] - 5\}$

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer los elementos de un polinomio

9 Reduce los siguientes polinomios, teniendo en cuenta los términos semejantes.

a. $3a - 8b + 5a - 4c + 2a - 11b - 2c$

b. $8x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9x^3 - 5x^2$

c. $5m - 3m^2 + 2m - 3 + m$

d. $2y^3 + 5y + y^3 - 4y - 2$

e. $-8p + 11p^2 - 20p + p^2 - 9 + 5$

f. $7r - 5r^2 + rh - 4h + 11h$

g. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}$

h. $\frac{8}{7}a^2 - \frac{3}{10}a^3b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{2}{5}ba^3 - \frac{1}{7}a^2$

Razonamiento

10 Indica el grado absoluto de cada polinomio. Después, determina el grado relativo del polinomio con respecto a la variable x.

a. $7x^5y^2 - 8x^4y + 2x^3 - 1$

b. $-6x^3y^2 + y^3 + \frac{1}{3}xy - 3x^2$

c. $x^2y^2 - 9x^3y^4 + y^7 - 2x^7 + xy^5$

d. $-\frac{1}{4}xy^2z^2 + \frac{2}{3}x^2yz^3 - x^3y^3z + 2$

e. $\frac{2}{5}m^{11}x^9 - \frac{3}{4}x^4m^{15} + 5 - \frac{7}{8}m^{10}x^{10}$

11 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. Un polinomio es una expresión algebraica. ( )

b. Dos términos con distintos coeficientes pueden ser semejantes. ( )

c. Un polinomio de tres términos y grado absoluto 3 recibe el nombre de trinomio. ( )

d. La expresión $-5x^3y + 2xy^3$ es un monomio. ( )

e. El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable es el mayor exponente de la variable en el polinomio. ( )

12 Indica si estas expresiones son polinomios o no.

a. $m^4 - 2m^5 + 5m^2 - 3$

b. $1 - y4$

c. $\sqrt{y} + 9y^2 + 5$

d. $\frac{2}{x^2} - x - 7$

e. $x^3 + x^5 + x^7$

f. $n - 2n^{-7} + 6$

g. $p^5 - p + \frac{2}{5}$

h. $-xy + \frac{5x^3}{y^7} - 4x^2y^5$

Comunicación

13 Indica si los términos son semejantes o no. Explica.

Términos	¿Son semejantes? Sí	No	¿Por qué?
$7a^2b^3$ y $-2a^2b^3$			
$2pqr$ y $-5pqr$			
$3x^2y^3$ y $-3y^2x^3$			
$4m$ y $-\frac{1}{4}m$			
$-a^5b^2c$ y $6a^2b^5c$			
$\frac{3}{5}x^3yz$ y x^3yz			

Tabla 2

14 Escribe un polinomio que cumpla las condiciones dadas.

a. Grado absoluto 5, dos variables.

b. Binomio, grado absoluto 7, una variable.

c. Trinomio, grado absoluto 12, tres variables.

d. Polinomio, grado absoluto 11, tres variables.

Resolución de problemas



15 Escribe el polinomio que represente el perímetro de cada figura.

a.

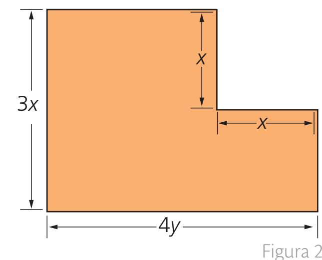


Figura 2

b.

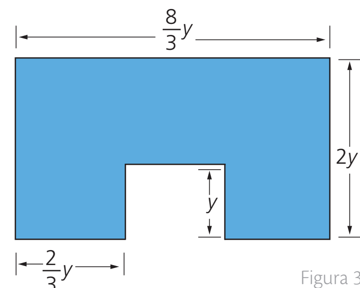


Figura 3

16 La longitud de un rectángulo mide 3 m más que el doble de su ancho. Si x es el ancho del rectángulo, escribe un polinomio que represente el perímetro del rectángulo y simplifica el polígono correspondiente.

3 Adición y sustracción de polinomios

Explora

El perímetro de una figura geométrica se calcula sumando las medidas de todos sus lados.

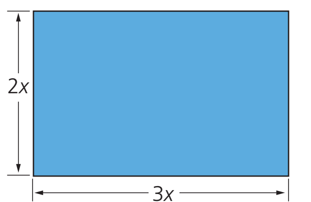


Figura 1

- Según lo anterior, ¿cuál es el perímetro del rectángulo de la Figura 1?

Ten en cuenta

Para sumar dos polinomios, se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

3.1 Adición de polinomios

Para hallar el perímetro del rectángulo, sumamos la longitud de todos sus lados así:

$$P = 3x + 2x + 3x + 2x$$

En este polinomio los términos son semejantes, luego se pueden reducir a un solo término algebraico, adicionando sus coeficientes y escribiendo la misma parte literal.

$$P: (3 + 2 + 3 + 2)x = 10x$$

Para **sumar polinomios,** se suman entre sí los monomios semejantes. Si los monomios no son semejantes, la suma se deja indicada.

Los polinomios se pueden adicionar como se explica a continuación:

En forma horizontal	En forma vertical
• Se ordenan los polinomios en forma ascendente o descendente con respecto a una misma variable y se indica la operación. • Se eliminan paréntesis y se reducen los términos semejantes.	• Se ordenan los polinomios y se escriben uno debajo del otro, tal que los términos semejantes queden en la misma columna. • Se reducen términos semejantes y se obtiene la suma.

Tabla 1

Ejemplo 1

Observa cómo se aplican los dos procesos en la siguiente suma de polinomios:

$$(2x^3 + 5x + 3 + 2x^2) + (4x - 3x^2 + x^3 - 5)$$

En forma horizontal	En forma vertical
$(2x^3 + 2x^2 + 5x + 3) + (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)$ $= 2x^3 + x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 5x + 4x + 3 - 5$ $= 3x^3 - x^2 + 9x - 2$	$2x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ――――――――― $3x^3 - x^2 + 9x - 2$

Tabla 2

Ejemplo 2

Para hallar la expresión algebraica que representa el perímetro de la Figura 2. se puede proceder así:

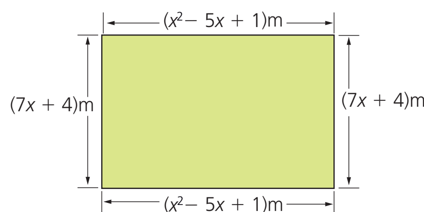


Figura 2

En forma horizontal	En forma vertical
$P = (x^2 - 5x + 1) + (7x + 4) +$ $(x^2 - 5x + 1) + (7x + 4)$ $P = x^2 + x^2 - 5x - 5x + 7x + 7x + 4 + 4$ $P = 2x^2 + 4x + 10$	$x^2 - 5x + 1$ $7x + 4$ $x^2 - 5x + 1$ $7x + 4$ ――――――――― $2x^2 + 4x + 10$

Tabla 3

Ejemplo 3

Al adicionar $8xy + x^2 - 6y^2$ y la expresión $x^2 - 3y^2 + 6xy$ se puede proceder de las siguientes maneras:

En forma horizontal	En forma vertical
$A_T = 8xy + x^2 - 6y^2 + 6xy + x^2 - 3y^2$ $= 14xy + 2x^2 - 9y^2$	$8xy + x^2 - 6y^2$ $6xy + x^2 - 3y^2$ ――――――――― $14xy + 2x^2 - 9y^2$

Tabla 4

Destreza con criterios de desempeño: Operar con polinomios en ejercicios numéricos y algebraicos.

3.2 Sustracción de polinomios

Para **sustraer polinomios**, se restan los coeficientes de los términos semejantes y se deja indicada la sustracción de los términos no semejantes.

Al hacer las sustracciones de polinomios, se utiliza el **polinomio opuesto**.

Ejemplo 4

El polinomio opuesto de otro polinomio se halla estableciendo el opuesto de los coeficientes de sus términos. Luego, el opuesto del polinomio $\frac{1}{2}xy^3 - 3x^2y + 2$ es $-\frac{1}{2}xy^3 + 3x^2y - 2$, ya que los opuestos de los coeficientes $\frac{1}{2}$, -3 y 2 son: $-\frac{1}{2}$, 3 y -2, respectivamente.

Ejemplo 5

Para restar $x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ menos $2x^3 - 4x^2 + 5$, aplicando el concepto de polinomio opuesto, se siguen los procedimientos que se muestran a continuación.

Horizontalmente:

1. Se identifican tanto el minuendo como el sustraendo.

   Minuendo: $(x^3 + 3x^2 - 5x + 7)$ Sustraendo: $2x^3 - 4x^2 + 5$

2. Se escribe el minuendo con su propio signo y, a continuación, el polinomio opuesto del sustraendo.

$$(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - (2x^3 - 4x^2 + 5)$$
$$= x^3 + 3x^2 - 5x + 7 - 2x^3 + 4x^2 - 5$$

3. Se reducen los términos semejantes.

$$x^3 - 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 5x - 5 + 7 = -x^3 + 7x^2 - 5x + 2$$

Verticalmente:

1. Después de identificar el minuendo y el sustraendo, se busca el polinomio opuesto del sustraendo.
2. Se ubican los términos del minuendo y, debajo, los términos del opuesto del sustraendo, teniendo en cuenta que cada término quede en la misma columna que su semejante.
3. Cuando hay términos que no tienen semejantes en el otro polinomio, se deja el espacio o se suma 0.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\ -2x^3 + 4x^2 + 0 - 5 \\ \hline -x^3 + 7x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

Ejemplo 6

Para restar $x^2y - 2xy + 1$ de $-3x^2y + \frac{1}{2}$, se procede de la siguiente manera:

$$\left(-3x^2y + \frac{1}{2}\right) - (x^2y - 2xy + 1) = -3x^2y + \frac{1}{2} - x^2y + 2xy - 1 =$$
$$-3x^2y - x^2y + \frac{1}{2} - 1 + 2xy = -4x^2y - \frac{1}{2} + 2xy =$$
$$-4x^2y + 2xy - \frac{1}{2}$$

Ten en cuenta

Para identificar si dos polinomios son **opuestos,** se verifica si sus coeficientes de igual grado son opuestos.

Ten en cuenta

Para sumar o restar dos polinomios, basta con sumar o restar los términos de igual grado. Ambas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa: $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$
- Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
- Existe elemento neutro, llamado también polinomio nulo.
- Cada polinomio tiene un opuesto.

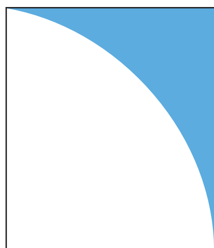
Ten en cuenta

Los polinomios se suelen denotar por una letra mayúscula, seguida entre paréntesis de las variables que contiene.

$P(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$Q(x, y) = 2x^3 - xy + 3$

3 Adición y sustracción de polinomios


Figura 3

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina el área de la parte sombreada de la Figura 3, considerando que el área del cuadrado está dada por la expresión $(8a^2 + 6b^2)$ y el área del sector circular es $(5a^2 - b^2)$.

Solución

Para determinar el área sombreada, se resta al área del cuadrado el área del sector circular.

Por lo tanto, el área sombreada es:

$A_{\text{sombreada}} = (8a^2 + 6b^2) - (5a^2 - b^2)$

$= 8a^2 + 6b^2 - 5a^2 + b^2$

$= 8a^2 - 5a^2 + 6b^2 + b^2$

$= 3a^2 + 7b^2$

Entonces, el área de la parte sombreada es $3a^2 + 7b^2$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe el opuesto de cada polinomio.

a. $4x + 7$

b. $-2mn + 9m^2$

c. $5y^2 - y - 3$

d. $-6ab^2 + 4a^2b$

3 Haz las siguientes sumas.

a. $(5x^2 - 7x - 8) + (-3x - 9)$

b. $(4a^2 + 2ab + 5b) + (6a^2 - 7ab)$

c. $(-15mn^2 + 6m^2n - 9m) + (-13\,m^2n - 2m + 3)$

d. $\left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{2}{3}m^2\right) + \left(-\frac{2}{5}m^3 + \frac{1}{6}m^2\right)$

e. $(-6x^3y^2 + 7x^2y^3 - 9) + \left(-\frac{8}{3}x^3y^2 + \frac{7}{4}\right)$

f. $\left(8a^3b^4 - \frac{2}{7}a^4b^3\right) + \left(-5a^4b^3 - \frac{1}{3}a^3b^4\right)$

4 Haz las siguientes sustracciones.

a. $(6x^2 - 3x - 7) - (8x^2 + 7x + 4)$

b. $(24a^2b - 6ab - 5) - (-7a^2b - 5ab - 8)$

c. $(3mn - 6m^2n^2 + 2m^3n^3) - (24m^2n^2 - 10m^3n^3)$

d. $(9x - 7y + 9z) - (3z - 4y + 2x)$

e. $(-6ab^2 + 8a^2b) - \left(\frac{2}{5}ab - \frac{4}{3}a^2b\right)$

f. $\left(\frac{3}{2}x^5y^4 - \frac{2}{3}x^4y^5\right) - \left(\frac{5}{6}x^5y^4 - \frac{7}{9}x^4y^5\right)$

Razonamiento

5 Realiza estas operaciones.

a. De $3x^2y$, restar $-8x^2y$.

b. Restar $-2m^3n^2$ de $-15m^3n^2$.

c. De $a^5 - 9a^3 + 6a^2 - 20$, restar $-a^4 + 11a^3 - a^2$.

d. De $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{9}z$, restar $-\frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$

e. De la suma de $a + b - 5$ con $8a - 3b + 12$, restar $2a - 6b + 21$.

f. De la suma de $8m^2 + 5$ con $-2 + 7\,m^2$, restar la suma de $20m - 8$ con $-m^2 + 5m$.

g. Restar la suma de $2a + b$ con $a - 3b$, de la suma de $-7a + 2b$ con $a - b$.

h. Restar $\frac{8}{3}x - \frac{1}{6}x^2$ de la adición de $x + 5x^2$ con $\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}x^2$.

i. De la diferencia entre $3a - 2b$ y $2a - b$, restar la suma de $8a - b$ con $5 - b$.

6 Escribe el polinomio que hace falta en cada operación.

a. $(-8m^3 + 4m^2 - 3) + \square = -6m^3 - 8m + 5$

b. $(3x^2y - 4xy^2 - 7x) - \square = -9x^2y + 5xy^2 - 8x$

c. $\left(\frac{1}{6}a^2 - \frac{3}{2}a\right) + \square = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a$

d. $\left(\frac{5}{7}y^3 - \frac{1}{3}y + 2\right) - \square = 6y^3 - 7y + \frac{1}{2}$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las propiedades algebraicas de los números enteros y racionales en la suma de polinomios

Ejercitación

7 Considera los siguientes polinomios.

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$Q(x) = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x$

Resuelve.

a. $P(x) + Q(x)$ b. $P(x) - R(x)$

c. $P(x) - Q(x) + R(x)$ d. $P(x) + Q(x) + R(x)$

8 Determina el perímetro de las figuras.

a.

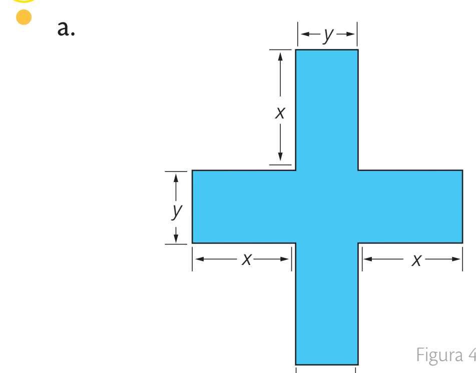


Figura 4

b.

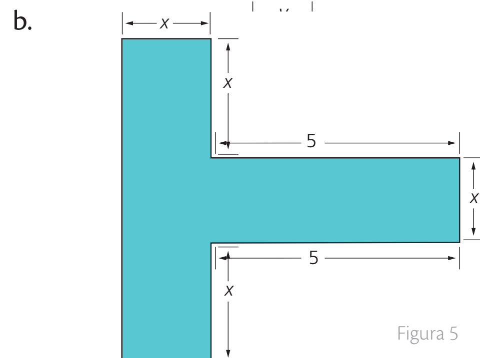


Figura 5

c.

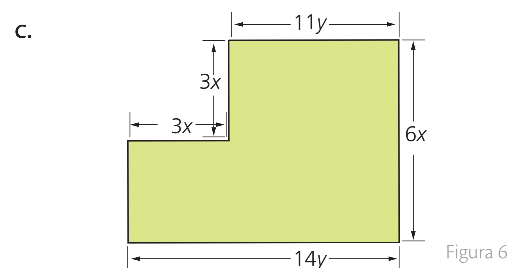
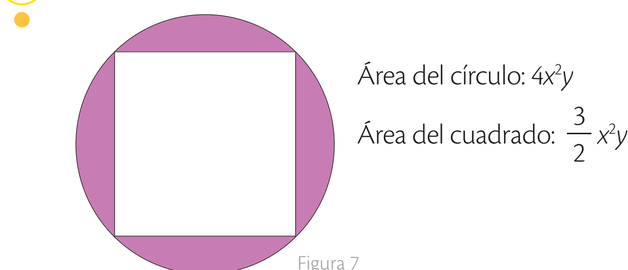


Figura 6

9 Halla el área de la región sombreada de la Figura 7.



Área del círculo: $4x^2y$

Área del cuadrado: $\frac{3}{2}x^2y$

Figura 7

Razonamiento

10 Completa los términos de la operación.

$5a^2$	+	▢	+	$7b^2$	−	30
		$5ab$	−	▢	+	▢
▢	+	ab	−	$36b^2$		
$-21a^2$	−	$8ab$	+	$2b^2$	+	15

11 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. El opuesto del polinomio $-7xy + 11y$ es el polinomio $7xy - 11y$. ( )

b. $3x^4 - 2x = x^3$. ( )

c. Al restar $28xy^2$ de $35xy^2$, se obtiene $-7xy^2$. ( )

d. En la adición de polinomios se utiliza el polinomio opuesto. ( )

12 Halla dos polinomios cuya suma sea cada uno de los siguientes polinomios.

a. $2y - 5$ b. $3m^2 + 2n - 6$

c. $-5x^3 - 6x^2\ 1\ 7x$ d. $-\frac{9}{2}a^3b^2 - \frac{9}{2}a^2b^3$

Resolución de problemas

13 ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo, si se sabe que el lado mayor excede en a al lado menor x?

14 Un club vacacional está distribuido por zonas. La zona de deportes tienen un área de $(15mn - 5m)$, la zona verde un área de $(7mn + 10m)$ y la zona de vivienda un área de $(5mn + 3m)$. Calcula el área total del club.

15 El perímetro del triángulo es $5m^2 + 8m + 6$. Encuentra el polinomio que representa la medida del tercer lado.

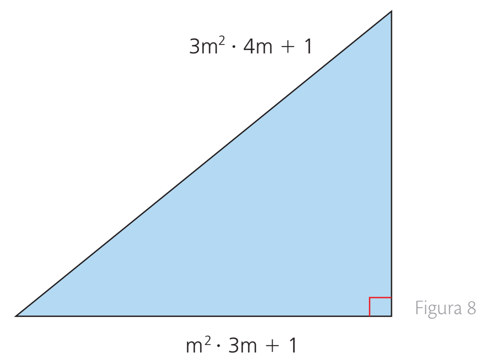


Figura 8

16 Alexandra llenó con $15y - 4$ galones de gasolina el tanque de su carro, al iniciar la semana. Gastó $7y - 3$ galones entre el lunes y el viernes y $3y + 1$ el fin de semana. ¿Cuántos galones le quedan todavía en el tanque?

Practica Más

Expresiones algebraicas

Resolución de problemas

1. Halla la expresión algebraica que determine el perímetro de cada figura.

a.

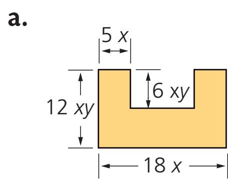


Figura 1

b.

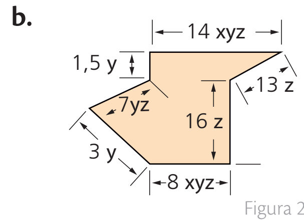


Figura 2

c.

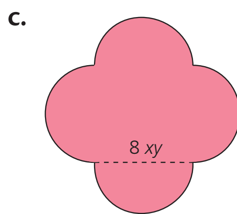


Figura 3

d.

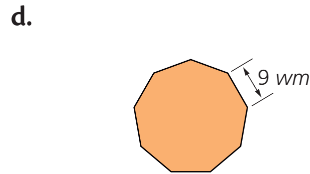


Figura 4

Ejercitación

2. Evalúa cada expresión para hallar el área y volumen de cada figura.

a. $x = 2, y = 5$

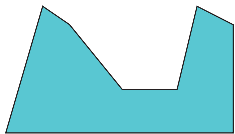


Figura 5

Área $= 3x^2 + 2xy^3 + y$

b. $a = 3, b = 4$

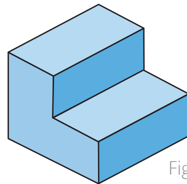


Figura 6

Volumen $= 2a^3b^2 + 5b^3$

c. $k = \sqrt{2}, m = 3$

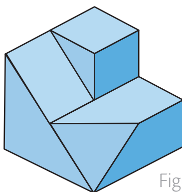


Figura 7

Volúmen $= 5k^2m^4 + k^4$

d. $l = \pi, p = \sqrt{2}$

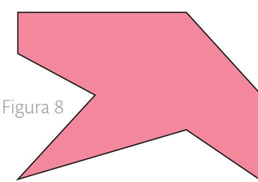


Figura 8

Área $= 5p^2l + 2lp^4$

Polinomios

3. Relaciona los monomios semejantes que hay en las columnas A y B.

Columna A	Columna B
a. $-2xy^3$	**1.** πx^3y^3
b. $12x^3y^3$	**2.** xyz^3
c. $-7xy^3z$	**3.** $12xy^3z^2$
d. $\frac{1}{4}xyz^3$	**4.** $-2xy^3z$
e. $-2xy^3z^2$	**5.** $0{,}5xy^3$

4. Indica los coeficientes, la parte literal y grado de cada polinomio.

a. $-\sqrt{2}a^2b - \frac{3}{5}a^2b^3 - \pi b^2$

b. $-x^2y + \frac{2}{5}xy^3 + 4y^3 + 7xy$

c. $a^2 + 0{,}5a^2b^3 - \sqrt{2}b^2$

d. $-\frac{5}{9}p^2 + 2q^4rs$

Adición y sustracción de polinomios

Ejercitación

5. Según los polinomios dados, realiza las operaciones.

A: $2a^2 + a^2b^3 - 5a^3b^2 + b^2$

B: $5a^2b^3 + 8a^3b^2 + 12b^2$

C: $-7a^2 + 7a^2b^3 - 7b^2$

a. $A + B$ **b.** $(A + C) - B$ **c.** $(B - C) - A$

Resolución de problemas

6. Halla el polinomio A faltante para que se cumpla la igualdad en cada caso.

a. $2a^2 + a^2b^3 + A = 8a^2 - 15a^2b^3 - 6a^3b^2$

b. $-3x^2y + 2xy^3 - A = x^2y + 6xy^3 - 2xy$

c. $A + 5k^2lm^4 + k^4 - 2km = 12k^4 + 5km$

7. Halla la expresión algebraica que determina el área de la región sombreada.

a.

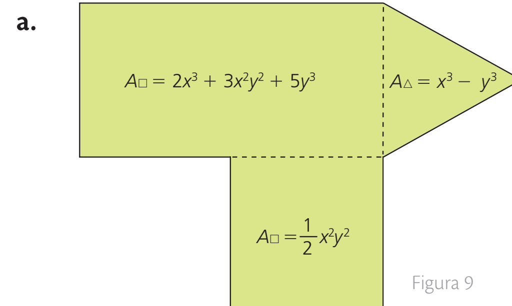


Figura 9

b.

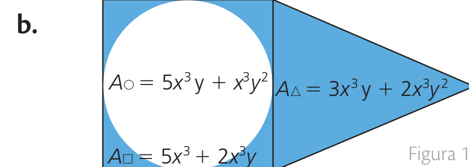


Figura 10

Resolución de Problemas

Estrategia: Descomponer una figura

Problema

Observa la figura 11 en ella se muestra un rectángulo formado por varias figuras.

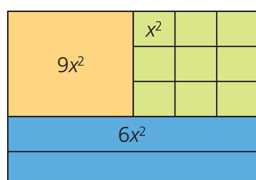


Figura 11

- ¿Cuál es el área total de la Figura 11?

1. Comprende el problema

- ¿Cómo está compuesta la figura?
  R: La figura está compuesta por un cuadrado grande, nueve cuadrados pequeños y dos rectángulos.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: El área total de la figura.

2. Crea un plan

- Calcula el área de cada una de las figuras que conforman el rectángulo y después súmalas para obtener el área total.

3. Ejecuta el plan

- El área del cuadrado grande es $9x^2$. (Figura 12)

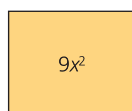


Figura 12

- Cada cuadrado pequeño tiene un área de x^2.
  Como son nueve, su área es $9x^2$. (Figura 12)

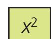


Figura 13

- Los dos rectángulos tienen igual área. Cada una mide $6x^2$ y, así, el área de los dos rectángulos es $12x^2$. (Figura14)

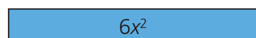


Figura 14

Por lo tanto, el área del rectángulo grande es
$9x^2 + 9x^2 + 12x^2$.

R: El área total del rectángulo es $30x^2$.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que en seis rectángulos caben nueve cuadrados grandes.

Aplica la estrategia

1. Observa la Figura 15.

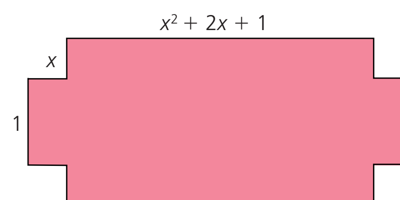


Figura 15

¿Qué expresión corresponde a su perímetro?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Un arquitecto diseña los jardines interiores de un conjunto residencial en forma de rectángulos que tienen de largo el triple del ancho. ¿Qué expresión determina el perímetro de uno de ellos?
3. ¿Los polinomios $x^2 - y^2$ y $x^2 - 2xy + y^2$ son equivalentes? Explica tu respuesta.
4. En una reunión, el número de mujeres es el doble que el de hombres disminuido en 5. Si denominamos x al número de hombres, ¿qué expresión determina el número de mujeres que hay en la reunión?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 16 y resuélvelo.

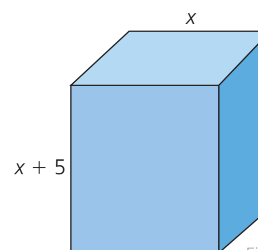


Figura 16

4 Multiplicación de polinomios

Explora

En una fábrica de cortinas, uno de los modelos está diseñado de manera que el largo de la cortina debe ser igual al triple del ancho.



- ¿Cuál es la expresión que muestra el área de este modelo de cortina?

Para calcular el área de la cortina, se debe multiplicar su ancho por su largo. Si se determina que el ancho corresponde a la variable x, entonces el largo será $3x$; por lo tanto, la expresión del área es $A = x \cdot 3x$.

La multiplicación se resuelve de la siguiente manera:

1. Se multiplican los coeficientes de los términos: $1 \cdot 3 = 3$
2. Se multiplica la parte literal de los términos: $x \cdot x = x^2$
3. Se expresa el área de la cortina: $3x^2$

En general, al **multiplicar dos expresiones algebraicas,** se aplica la propiedad de las potencias de igual base y la ley de los coeficientes.

4.1 Multiplicación de monomios

La **multiplicación de monomios** se realiza multiplicando los coeficientes de las expresiones algebraicas y aplicando la propiedad de las potencias de igual base.

Ejemplo 1

Observa los productos de las siguientes multiplicaciones de monomios.

a. $(4ab^2c^3)(5a^3) = 20a^4b^2c^3$ **b.** $(-5x^2y^4z)(5z^3) = -25x^2y^4z^4$

Ejemplo 2

Mira la manera de relacionar cada multiplicación de monomios con su producto.

a. $(m^4nz^5)(nz^2)$ **b.** $(2m^3y^4)(-5my^4)$ **c.** $\left(\frac{3}{2}a^2\right)\left(-\frac{4}{5}a^4\right)$

(b.) $-10m^4y^8$ (a.) $m^4n^2z^7$ (c.) $-\frac{6}{5}a^6$

4.2 Multiplicación de monomio por polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Es importante aplicar las reglas de multiplicación de signos. Al final, si resultan términos semejantes, se reducen.

Ejemplo 3

Efectúa la multiplicación $(5a^3b + 6ab^2 - 4a^2)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$.

$$5a^3b \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) + 6ab^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) - 4a^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) = -2a^4b^2 - \frac{12}{5}a^2b^3 + \frac{8}{5}$$

a^3b

Ejemplo 4

Observa otra forma de realizar la multiplicación de un monomio por un polinomio.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{7}x^3y^2 - \frac{4}{9}x^2y + \frac{7}{8}xy \\ -\frac{2}{9}x^2y \\ \hline -\frac{4}{63}x^5y^3 - \frac{8}{81}x^4y^2 - \frac{14}{72}x^3y^2 \end{array}$$

Ten en cuenta

Propiedad distributiva

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ten en cuenta

La propiedad de potencias de igual base establece que, al multiplicar potencias de la misma base, se deja la base y se suman exponentes.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ten en cuenta

El signo $-$ delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos dentro del paréntesis.

$-(2x^2 - 3x + 1) =$

$-2x^2 + 3x - 1$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las propiedades algebraicas de los números enteros y racionales en la multiplicación de términos.

4.3 Multiplicación de polinomio por polinomio

La **multiplicación de polinomios** se basa en la **propiedad distributiva**. Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos del multiplicando por todos los términos del multiplicador y luego se suman los resultados.

Ejemplo 5

Observa cada uno de los pasos para multiplicar.

$$3x^2y - 2xy + 3y$$
$$xy + 2y$$

$3x^3y^2 - 2x^2y^2 + 3xy^2$ → Se multiplica por xy

$6x^2y^2 - 4xy^2 + 6y^2$ → Se multiplica por $2y$

$3x^3y^2 + 4x^2y^2 - xy^2 + 6y^2$ → Se adiciona

Ejemplo 6

Observa cómo se realizó esta multiplicación.

$$8a^2b - 4b + 6c$$
$$2ab + c$$
$$16a^3b^2 - 8ab^2 + 12abc$$
$$+ 8a^2bc - 4bc + 6c^2$$
$$16a^3b^2 - 8ab^2 + 12abc + a^2bc - 4bc + 6c^2$$

Ejemplo 7

Observa la forma de multiplicar los polinomios que se muestra a continuación.

$(m^2 + n^3 + z^4)(p^2 - q^3) =$

$(m^2 \cdot p^2) + (n^3 \cdot p^2) + (z^4 \cdot p^2) - (m^2 \cdot q^3) - (n^3 \cdot q^3) - (z^4 \cdot q^3) =$

$m^2p^2 + n^3p^2 + z^4p^2 - m^2q^3 - n^3q^3 - z^4q^3$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Halla la superficie de la Figura 1

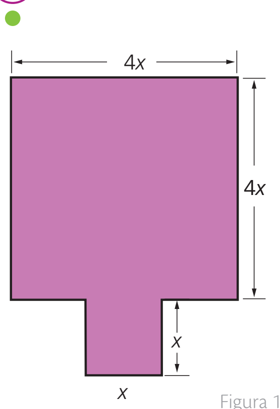


Figura 1

Solución:

La figura se puede descomponer en dos cuadrados, uno de $4x$ de lado y otro de lado x.

Entonces, la superficie de la figura de la izquierda se obtiene al resolver la siguiente expresión:

$$(4x)(4x) + (x)(x)$$

Se resuelve la expresión y se obtiene esto:

$$(4x)(4x) + (x)(x)$$
$$16x^2 + x^2$$
$$17x^2$$

Por lo tanto, la superficie de la Figura 1 se representa con la expresión $17x^2$.

Ten en cuenta

Propiedad distributiva

Al multiplicar un polinomio por una expresión algebraica, se multiplica el polinomio por cada uno de los términos que se encuentran en el paréntesis.

$$x^2(y^3 + 4a^4) =$$
$$x^2 \cdot y^3 + x^2 \cdot 4a^4 =$$
$$x^2y^3 + 4x^2a^4$$

Ten en cuenta

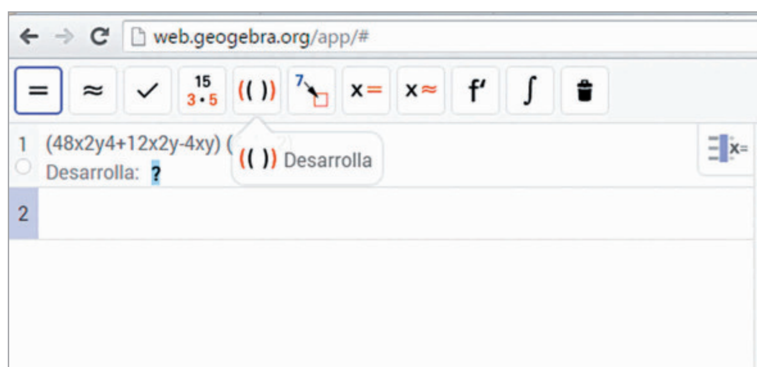
La elección de las letras x y y para denotar variables se debe a una duda que tuvo el editor de los escritos de Descartes, ya que ante la gran cantidad de ecuaciones de su libro *Geometrie*, le preguntó si podía utilizar letras poco frecuentes en francés y escogió las últimas letras del alfabeto.

4 Multiplicación de polinomios

MatemaTICS

Multiplica polinomios usando Geogebra

Cuando usas Geogebra puedes multiplicar expresiones algebraicas, usando la ventana de calculo simbólico (CAS).



- Ubícate en la ventana CAS o cálculo simbólico.
- Al lado derecho del número 1 escribe la expresión que quieres resolver, es decir, los polinomios que deseas multiplicar.
- Para hallar el valor de la multiplicación, da clic en (( )) y luego obtendrás el valor final de la multiplicación.

Figura 1

- Determina si $(48x^2y^4 + 12x^2y - 4xy)(4ab + 2) \neq (4ab + 2)(48x^2y^4 + 12x^2y - 4xy)$. Justifica tu respuesta.
- Usa Geogebra para decidir si cada una de las siguientes operaciones son verdaderas.

a. $\left(\frac{1}{3}m^2nq^4 + 3x + 2\right)(8x^2 + 1) = \frac{8}{3}m^2nq^4x^2 + \frac{1}{3}m^2nq^4 + 24x^3 + 16x^2 + 3x + 2$

b. $(2mn^4 + 2y^3)\left(3 + mna^2 - \frac{1}{4}b^2\right) = -\frac{1}{2}b^2 mn^4 + 2mn^4 mna^2 - \frac{1}{2}b^2y^3 + 2mna^2y^3 + 6mn^4 + 6y$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las multiplicaciones entre monomios.

a. $(-6x^3)(7x^4)$ b. $(2y^8)(9y^9)$
c. $(3y)(y^2)$ d. $(x^2)(-2x^2)$
e. $(-3x^2y)(2x^3y)$ f. $(-2xy)(-2xy)$

3 Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(2x^2yz^3)(3x^3yz^3)$ b. $(x^{10}yz^3)(3x^3yz^3)$
c. $(3x^5y)(4x^6y^6z^6)$ d. $(-2y^5z)(x^2z)$
e. $(xy^3z^3)(-x^3yz)$ f. $(7x^2y^3z^4)(x^4y^3z)$

Razonamiento

4 Relaciona los siguientes productos con sus respectivos resultados.

a. $(9x^3 + y^2z)(x^3y^4z)$	$-3x^3y^3z - 3y^3z^4$
b. $(x^2z)(3x^2y^3 + z^4)$	$6x^7y^7 - 2xy^8$
c. $(-3y^3z)(x^3 + z^3)$	$9x^6y^4z + x^3y^6z^2$
d. $(2x^6y^2)(2x^3 - y^7z^2)$	$3x^4y^3z + x^2z^5$
e. $(-3x^6 + y)(-2xy^7)$	$-16x^4y^3 - 4xy^4$
f. $(-4x^3 - y)(4xy^3)$	$4x^9y^2 - 2x^6y^9z^2$

5 El producto de dos polinomios es $10x^3 - 15x^2 + 20x$. Si uno de los polinomios es $2x^2 - 3x + 4$, ¿cuál es el otro polinomio?

6 Determina el polinomio que representa el área de cada una de las siguientes figuras.

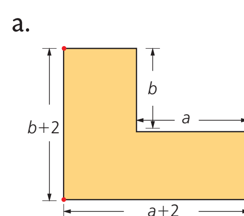
a.


Figura 2

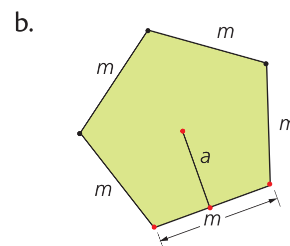
b.


Figura 3

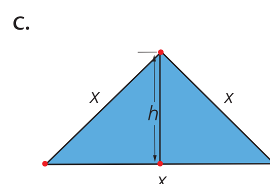
c.


Figura 4

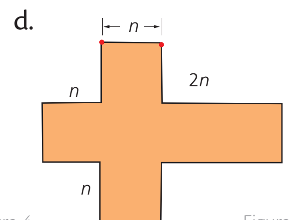
d.


Figura 5

- Ten en cuenta las fórmulas correspondientes cada para cada caso.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

7 Indica si el resultado de las siguientes operaciones es correcto (C) o incorrecto (I).

a. $(7x + 6)(2x) = 14x + 6x^2$ ( )

b. $x(3x^3 + 2y^2) = 3x^4 + 2xy^2$ ( )

c. $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 + 1$ ( )

d. $5xy^3(x^4 + 2y^5) = 5xy^3 + 10xy^8$ ( )

e. $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 1$ ( )

f. $3xy(3x^2 - 7y^2) = 9x^3y - 21xy^3$ ( )

g. $x^3(x^2 + y^3) = x^6 + x^3y^3$ ( )

Comunicación

8 Identifica el error que se cometió en las multiplicaciones.

a.

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 6x - 4 \\ 3x - 2 \\ \hline -10x^2 - 12x + 8 \\ 15x^3 + 18x^2 + 12x \\ \hline 15x^3 + 8x^2 + 0x + 8 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 8x + 4 \\ 2x^2 + 5x - 1 \\ \hline -3x^3 + 8x - 4 \\ 15x^4 - 40x^2 + 20x \\ 6x^5 - 16x^3 + 8x^2 \\ \hline 6x^5 + 15x^4 - 13x^3 - 32x^2 + 28x - 4 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{r} 2x^3y^2 - 5xy \\ -3x^2y \\ \hline -6x^5y^3 \\ 15x^3y^2 \\ \hline 9x^2y \end{array}$$

9 Completa las siguientes operaciones con el polinomio les hace falta.

a. $(-x + 5)$ ☐ $= -3x^2 + 15x$

b. ☐ $(-x + 5) = 9x^2 + 9x$

c. $(3x)$ ☐ $= 12x^2 - 18x$

d. $(-3x^3)(x^2 - 3) =$ ☐

e. ☐ $(4x^3y - 5xy^3) = 16x^5y^3 - 20xy^3x^2y^2$

f. $(9x)(3x^2 + 5x - 3) =$ ☐

g. $(5x^2)$ ☐ $= 10x^5 + 25x^4 - 15x^2$

h. $(x^3 + 3)$ ☐ $= xy^2x^3 - 3x^3y + 3xy^2 - 9y$

Razonamiento

10 Al multiplicar dos binomios, se obtiene como resultado el polinomio $6xy^4x^2 - 6x^2y^2 + 15xy^4 - 15y^2$.

- Si uno de los binomios es $3xy^4 - 3y^2$, determina cuál es el otro binomio.

11 Relaciona cada figura geométrica con el polinomio que representa su área.

a. $5x^2$

b. x^2

c. $\frac{6ax}{2}$

d. $\frac{xh}{2}$

e. $5x^2$

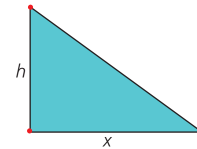


Figura 6

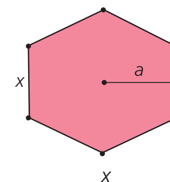


Figura 7

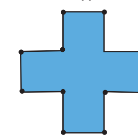


Figura 8

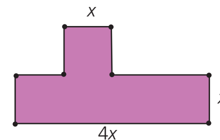


Figura 9

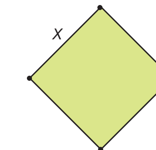


Figura 10

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

12 Un lado de un rectángulo se representa con el polinomio $x + 3$ y el otro lado, con el polinomio $3x + 1$. A partir de esta información, determina:

a. El área del rectángulo en términos de x.

b. El área del rectángulo si $x = 2$ cm.

13 Se tiene un cuadrado de lado x. Responde.

a. ¿Cuál es la expresión del área en función de x?

b. ¿Cuál es el área si $x = 3$ cm?

14 Se cuenta con un prisma rectangular como el de la Figura 11. Resuelve.

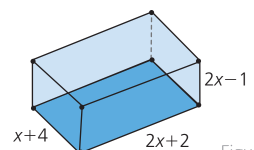


Figura 11

a. Halla el polinomio que representa el área de la base.

b. Determina un polinomio que represente el volumen del prisma rectangular.

5 Productos notables

Explora

Una finca está parcelada tal como muestra la Figura 1. En cada región sembraron diferentes productos.

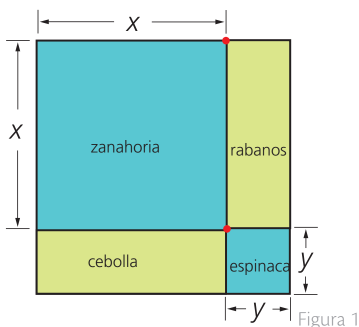


Figura 1

- ¿Qué área corresponde al cultivo de espinacas?
- ¿Cuál es la expresión que permite determinar el área total de la finca?



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

Encontrarás algunos ejercicios relacionados con los productos notables. Estos te ayudarán a evaluar tu grado de comprensión acerca del tema.

www.e-sm.net/8smt03

App

Productos notables

Abre la aplicación *MathSteps*, escribe expresiones algebraicas y realiza cálculos sencillos. Compara tus soluciones con las dadas por la aplicación.



Para calcular el área del terreno destinado al cultivo de espinacas, es necesario hallar el valor del cuadrado pequeño que está en la parte inferior de la Figura 2

Observa que cada lado tiene una longitud representada por la variable y; por lo tanto, el área será igual a y^2.

En cuanto a la expresión para determinar el área total de la finca, se puede calcular el área de cada una de las secciones y sumarlas. Entonces:

$A1 = x \cdot x$ $\quad A2 = (x)(y) = xy$ $\quad A3 = (x)(y) = xy$ $\quad A4 = (y \cdot y) = y^2$

Luego, el área de la finca se calcula sumando $x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Sin embargo, este resultado también se puede calcular encontrando primero la expresión que corresponde al lado de la finca y elevándola al cuadrado. Observa:

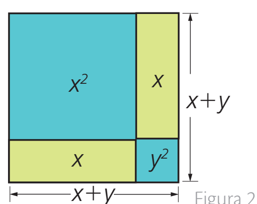


Figura 2

$(x + y)^2 =$

$(x + y)\,(x + y) =$

$x^2 + 2xy + y^2$

Esto corresponde a un producto notable.

Los **productos notables** son regularidades que se pueden calcular sin necesidad de aplicar el algoritmo de la multiplicación.

5.1 Cuadrado de un binomio

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado.

Cuadrado de la suma de dos términos	Cuadrado de la resta de dos términos
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Tabla 1

Ejemplo 1

Observa la solución del producto notable $(m + n)^2$.

- Se eleva el primer término al cuadrado: m^2
- Se halla el doble del primer término por el segundo: $2mn$
- Se eleva el segundo término al cuadrado: n^2
- Por último, se suman las expresiones obtenidas: $m^2 + 2mn + n^2$

5.2 Producto de la suma por la diferencia de dos términos

El **producto de la suma por la diferencia de dos términos** es equivalente a la diferencia entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 2

Efectúa el producto notable $(2a - 4b)(2a + 4b)$.

- Se eleva el primer término al cuadrado: $(2a)^2 = 4a^2$
- Se eleva el segundo término al cuadrado: $(4b)^2 = 16b^2$
- Se unen los dos términos mediante el signo de diferencia: $4a^2 - 16b^2$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

5.3 Producto de la forma $(x + a)(x + b)$

El **producto de la forma $(x + a)(x + b)$** es equivalente al cuadrado del término común, más el producto de dicho término por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes.

Ejemplo 3

Calcula, el producto notable $(x + 7)(x + 6)$.

- Se calcula el primer término elevado al cuadrado: x^2
- Se calcula el producto del primer término por la suma de los términos no comunes: $x(7 + 6)$
- Se halla el producto de los segundo términos de los binomios: $(7)(6)$
- Se establece la igualdad correspondiente: $(x + 7)(x + 6) = x^2 + 13x + 42$

5.4 Cubo de un binomio

El **cubo de un binomio** es equivalente al cubo del primer término, más (o menos) el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más (o menos) el cubo del segundo término.

Cubo de la suma de dos términos	Cubo de la diferencia de dos términos
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Tabla 2

Ejemplo 4

Observa cómo se determina el cubo del binomio $(a + b)$.

- Se halla el primer término elevado al cubo: a^3
- Se calcula el triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3a^2b$
- Se busca el triple del primer término por el segundo al cuadrado: $3ab^2$
- Se expresa el segundo término elevado al cubo: b^3

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ejemplo 5

Analiza cómo se halla el resultado de $(2m - n)^3$.

- Se halla el primer término elevado al cubo: $(2m)^3 = 8m^3$
- Se calcula el triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3(2m)^2n = 12m^2n$
- Se multiplica el triple del primer término por el segundo elevado al cuadrado: $3(2m)(n)^2 = 6mn^2$
- Se eleva el segundo término al cubo: n^3

Por lo tanto, el resultado es $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$.

Observa que cuando se trata de un binomio por diferencia, todos los signos se intercalan empezando por uno positivo.

Ten en cuenta

El volumen del cubo de arista $x + y$ se calcula desarrollando la expresión $(x + y)^3$.

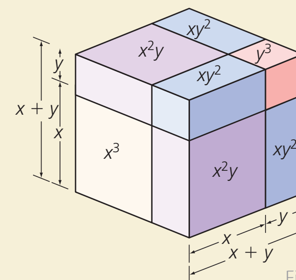


Figura 3

Sin embargo, se puede expresar en términos de los volúmenes más pequeños, como se observa en la Figura 4.

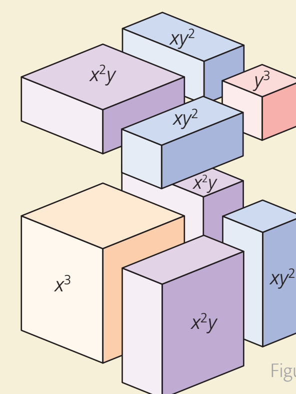


Figura 4

Ten en cuenta

En resumen, el producto de la forma $(x + a)(x + b)$ se resuelve así:

$(x + a)(x + b) =$
$x^2 + x(a + b) + ab$

Para calcular el cubo de un binomio, se realiza lo siguiente:

$(a + b)^3 =$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

También se puede realizar así:

$(a - b)^3 =$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

5 Productos notables

Ten en cuenta

Siempre que encuentres un signo menos delante de un paréntesis, todos los términos que se encuentren en el paréntesis se verán afectados.

$$-(4x^2 + y) = -4x^2 - y$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 El cubo de un binomio es $8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$. Encuentra el binomio.

Solución:

- Para establecer el binomio, se halla la raíz cúbica del primer y del cuarto término, puesto que estos valores están elevados al cubo. Entonces:

$$\sqrt[3]{8m^3} = 2m \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

- Luego, el primer término del binomio es $2m$ y el segundo término es 3.
- Para determinar con cuál operación se unirá el binomio (adición o diferencia), se observan las características de los signos de la expresión incial y se identifica que todos son positivos. Entonces, el binomio es de suma.
- Por lo tanto, se concluye que el producto notable es $(2m + 3)^3$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los binomios al cuadrado.

a. $(4x - 5y)^2$ b. $(3x + 2y)^2$

c. $(2x + 3y)^2$ d. $(-12v + 7z)^2$

e. $\left(\frac{1}{8}a - \frac{3}{4}b\right)^2$ f. $\left(\frac{4}{5}j - \frac{7}{8}a\right)^2$

3 Calcula los siguientes productos notables.

a. $(9 + 4m)^2$ b. $(x^{10} + 5y^2)^2$

c. $(2x + 3z)^2$ d. $(4m^5 + 5n^3)^2$

e. $\left(\frac{3}{6}w - \frac{1}{2}y\right)^2$ f. $\left(\frac{5}{7}a^2 + \frac{1}{8}n\right)^2$

4 Resuelve estos productos notables.

a. $(x - y) \cdot (x + y)$ b. $(2a - 1) \cdot (2a + 1)$

c. $(1 - 3ax) \cdot (1 + 3ax)$ d. $(a - b) \cdot (a + b)$

e. $(a - x) \cdot (a + x)$ f. $(m + n) \cdot (m - n)$

g. $\left(\frac{1}{4}m - \frac{2}{5}n\right) \cdot \left(\frac{1}{4}m - \frac{2}{5}n\right)$

5 Completa cada tabla de doble entrada, con los resultados de los productos notables correspondientes.

$\times$	$(2a + n)$
$(2a - n)$	
$(2a + n)$	

Tabla 3

$\times$	$(x + y)$
$(x + y)$	
$(x + y)^2$	

Tabla 4

6 Calcula el producto de las expresiones algebraicas.

a. $(x - 2) \cdot (x + 3)$

b. $(2a - 5) \cdot (2a + 6)$

c. $(a - 3b) \cdot (a + x)$

d. $(1 - a) \cdot (a + 1)$

e. $(3ab - 5x) \cdot (3ab + 2)$

f. $\left(\frac{1}{9}m + \frac{2}{7}n\right) \cdot \left(\frac{1}{9}m - \frac{1}{3}\right)$

7 Calcula el cubo de un binomio en cada caso.

a. $(a + 2)^3$ b. $(a - 4)^3$

c. $\left(m - \frac{2}{7}\right)^3$ d. $\left(m + \frac{5}{4}\right)^3$

e. $\left(\frac{2}{3} + x\right)^3$ f. $\left(n - \frac{2}{7}\right)^3$

Razonamiento

8 Relaciona cada producto notable con su respuesta.

a. $(a + 3)^3$ ( ) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{28}{9}ab + \frac{49}{9}b^2$

b. $\left(\frac{7}{6}x + \frac{1}{2}m\right)^2$ ( ) $\frac{1}{4}m^2 + \frac{7}{6}mx + \frac{49}{36}x^2$

c. $\left(-\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}b\right)^2$ ( ) $x^2 - y^2$

d. $(x + y)(x - y)$ ( ) $(m - n)(m + n)$

e. $m^2 - n^2$ ( ) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

9 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada producto notable.

a. $(1 - 4ax)^3$

$= 1 - 3a^2x + 12ax^2 + 16a^3x^3$

b. $((x + y) + 1)((x - y) - 1)$

$= x^2 - y^2 - 2y + 1$

c. $(5x^3 + 6m^4)^2$

$= 25x^5 - 60x^3m^4 - 36m^8$

10 Determina, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Explica tus respuestas.

a. Para hallar el cubo de un binomio, el primer y segundo término se elevan al cuadrado. ( )

b. En el cuadrado de un binomio, todos los términos se elevan al cuadrado. ( )

c. Al multiplicar la suma por la diferencia de un mismo binomio, su resultado es el primer término elevado al cuadrado, menos el segundo término elevado al cuadrado. ( )

d. El producto de la forma $(x + a)(x + b)$ es equivalente al cuadrado del término común más el producto de los no comunes. ( )

Comunicación

11 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$[(2x - 1)^2 - 1^2]$

12 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$(y - 1)^3 (y + 1)^3$

13 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$[(a + b)(a - b)][2 - (a + b)][2 + (a + b)]$

14 Indica el producto notable que aplica en cada caso.

a. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b. $(v + w)(v - w) = v^2 - w^2$

c. $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

d. $(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$

15 Para cada una de las siguientes figuras obtén una expresión simplificada para el área, aplicando la teoría de los productos notables.

a.

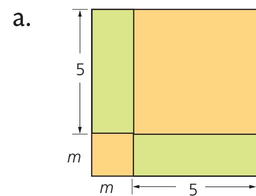


Figura 5

b.

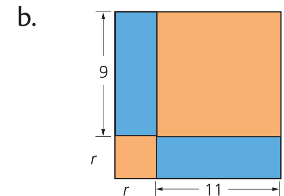


Figura 6

Resolución de problemas



16 Un apartaestudio de forma cuadrada mide $2x + 3y$ de lado, como se muestra en la Figura 7. ¿Cuál es el área total del apartaestudio?



Figura 7

17 Un carpintero necesita hacer una puerta para una alacena en una cocina. Si se sabe que las medidas de la puerta son $(3x + 9)$ y $(3x - 9)$, respectivamente. ¿Cuál es el área de la puerta?

18 Miguel compró una nueva CPU para su computadora. Si cuenta con espacio de $100x^2 + 24x - 8$ y se sabe que las medidas de la CPU son $(10x + 3)$ y $(10x - 1)$, ¿podrá instalarla en este espacio?

19 Se requiere hallar el área de una tableta cuyas dimensiones son $(3x + 4)$ y $(3x + 1)$. ¿Cuál es la expresión que representa la superficie de la tableta?



SM Ediciones

20 El nuevo televisor de la compañía tiene las siguientes dimensiones: $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(\frac{1}{2}x - 8\right)$. ¿Cuál es el área que ocupa el televisor?

6 División de polinomios

Explora

Raquel hizo un mantel rectangular cuya área se expresa como $4x^2$ y se sabe que el largo del rectángulo es $2x$.

- ¿Cuál es el ancho del mantel?



SM Ediciones

6.1 División entre un monomio

Para hallar el ancho del mantel, se aplica la fórrmula del área del rectángulo y en esta se reemplazan los datos dados. Observa:

$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho} \qquad 4x^2 = (2x) \cdot (\text{ancho})$$

Como se necesita hallar el ancho del mantel, se necesita dividir las dos cantidades conocidas. Entonces se obtiene esto:

$$\frac{4x^2}{2x} = 2x$$

Después, se simplifican las cantidades enteras y se restan los exponentes. Por lo tanto, el ancho del mantel es $2x$.

Para **dividir un polinomio por un monomio**, se divide cada término del polinomio entre el monomio. Se debe tener en cuenta que se deben simplificar las cantidades enteras y aplicar la ley de los cocientes para exponentes.

Ejemplo 1

Para dividir un monomio entre otro monomio, por ejemplo $\frac{40x^{10}}{5x^2}$, se realizan los siguientes pasos:

1. Se simplifican las cantidades enteras: $\frac{40x^{10}}{5x^2} = 8\frac{x^{10}}{x^4}$
2. Se aplica la ley de los cocientes para exponentes: $8x^{10-4=6}$
3. El resultado es $8x^6$.

Ejemplo 2

Observa cómo se divide un polinomio entre un monomio.

$$\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8}{4x^2}$$

Se expresa cada término del polinomio, dividiéndolo por el monomio dado y teniendo en cuenta la regla de los exponentes, como se muestra a continuación:

$$\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2} = \frac{4x^5}{4x^2} - \frac{6x^4}{4x^2} + \frac{12x^3}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2}$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$$

Por lo tanto, el cociente es $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$.

Ejemplo 3

Divide $8x^4 - 3x^3$ entre x^2.

Esta es otra forma de presentar la división, aun cuando se aplican los mismos pasos.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 - 3x^3 & x^2 \\ \hline -8x^4 \qquad & 8x^2 + 3x \\ -3x^3 & \\ 3x^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Entonces, el resultado de la división es $8x^2 + 3x$.

Ten en cuenta

Al realizar la división entre monomios, el coeficiente del cociente tiene el signo que corresponda según la regla de los signos.

+ por +	+
+ por −	−
− por +	−
− por −	+



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt03

Encuentra más ejemplos relacionados con el la división de polinomios.

Ten en cuenta

Las reglas de las potencias necesarias para operar con polinomios son:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$(a \div b)^m = a^m \div b^m$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular divisiones con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Haz las divisiones de polinomios entre monomios.

a. $\frac{20x^4 + 16x^3 + 8x^2}{4x^2}$

b. $\frac{35x^3 + 21x^2 + 7x}{7x}$

c. $\frac{9a^6b^5}{3ab^5}$

d. $\frac{8b - 12a^4b^3 - 6a^5b^2 + 10a}{2ab^2}$

Solución:

a. $\frac{20x^4}{4x^2} + \frac{16x^3}{4x^2} + \frac{8x^2}{4x^2} = 5x^2 + 4x + 2$

b. $\frac{35x^3}{7x} + \frac{21x^2}{7x} + \frac{7x}{7x} = 5x^2 + 4x + 1$

c. $3a^5$

d. $\frac{8b}{2ab^2} - \frac{12a^4b^3}{2ab^2} - \frac{6a^5b^2}{2ab^2} + \frac{10a}{2ab^2} = \frac{4}{ab} - 6a^3b - 3a^4 + \frac{5x^3}{b^2}$

Ten en cuenta

División de polinomios

Si el residuo de la división es cero, se llama exacta. De lo contrario, se afirma que es una división inexacta.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $\frac{x^7}{x^5}$ b. $\frac{6x^3y^2}{2y}$ c. $\frac{21x^2y^3}{7x^2y^2}$

d. $\frac{9a^2 - 6a}{3a}$ e. $\frac{10a^3 + 8}{2}$ f. $\frac{12a^2 + 8a + 24}{2}$

3 Relaciona las divisiones de la izquierda con los resultados de la derecha.

a. $\frac{a^2 - 6a + 4}{2a}$	$\frac{5x^4y^2 - 4xy^3 + 3y}{y^2}$
b. $\frac{6x^2 + 8x - 24}{2x}$	$b + \frac{1}{2} - \frac{4}{b}$
c. $\frac{10x^2y^2 - 8xy^3 + 6y}{2y^2}$	$3x^2 - 2x - 5$
d. $\frac{25a^3b + 15ab^3}{5ab}$	$\frac{1}{2}a^{-3} + \frac{2}{a}$
e. $\frac{2b^2 + b - 8}{2b}$	$3y^2 + 2y$
f. $\frac{15x^2 - 10x - 25}{5}$	$3x+4 - \frac{12}{x}$
g. $\frac{9y^3 + 6y^2}{3y}$	$5a^2 + 3b^2$

Razonamiento

4 Si se divide un binomio entre un monomio, ¿es posible obtener un monomio como cociente? Justifica tu respuesta. Si la respuesta es afirmativa, propón un ejemplo.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

5 El área del triángulo es $2a^3 + 8a^2 + 3a + 12$. Si su base es igual a $4a^2 + 6$, ¿cuál es la altura del triángulo?

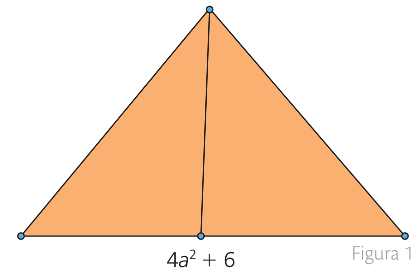


Figura 1

6 El área del rectángulo es $5x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 9x + 6$. Si la longitud de su base es igual a $5x^2 + 3x + 2$, ¿cuál es la altura del rectángulo?

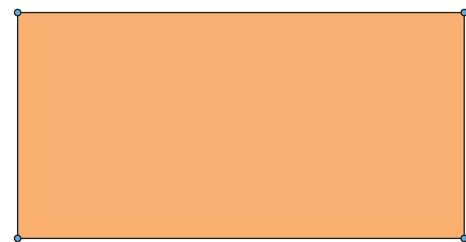


Figura 2

6 División de polinomios

Explora

Determina si es posible afirmar que al dividir $x^2 + 3x + 2$ entre $x + 2$, se obtiene como cociente $x + 1$.



Ten en cuenta

Los términos de una división son:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

En toda división de polinomios se cumple lo siguiente:

$P(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$

- $P(x)$: Polinomio dividendo
- $d(x)$: Polinomio divisor
- $C(x)$: Polinomio cociente
- $R(x)$: Polinomio residuo

6.2 División entre polinomios

Una forma de comprobar si la afirmación es cierta, es multiplicando el cociente y el dividendo, como se muestra a continuación:

$$(x + 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

Como se obtiene el mismo valor que el dividendo, se puede afirmar que es verdadera.

Otra forma de conocer la veracidad de la afirmación es haciendo la división así:

a. Se ordenan los términos del divisor y el dividendo, en potencias descendientes con respecto a una variable.

b. Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

c. Se multiplica todo el divisor por el término del cociente que se halló en el paso anterior y se ubican los productos debajo de los respectivos términos del dividendo.

d. Se restan las cantidades.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^2 & +\,3x & +\,2 & & x+2 \\ \cline{5-5} -x^2 & -\,2x & & & x+1 \\ \cline{1-3} 0 & +\,x & +\,2 & & \\ & -\,x & -\,2 & & \\ \cline{1-3} & & 0 & & \end{array}$$

Ejemplo 4

La división $3y^2 + y^3 - 2y - 1$ entre $y^2 + 2y$, aplicando los pasos anteriores, es:

$$\begin{array}{rrrr|l} y^3 & +\,3y^2 & -\,2y & -\,1 & y^2+2y \\ \cline{5-5} -y^3 & -\,2y^2 & & & y+1 \\ \cline{1-4} & +\,y^2 & -\,2y & -\,1 & \\ & -\,y^2 & -\,2y & & \\ \cline{1-4} & & -\,4y & -\,1 & \end{array}$$

En esta división se tiene un residuo $-4y - 1$.

Ejemplo 5

Resuelve $(4x^3 - 13x^2 + 8x - 15) \div (4x^2 - x + 5)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -\,13x^2 & +\,8x & -\,15 & 4x^2-x+5 \\ \cline{5-5} -4x^3 & +\,x^2 & -\,5x & & x-3 \\ \cline{1-4} & -\,12x^2 & +\,3x & -\,15 & \\ & 12x^2 & -\,3x & +\,15 & \\ \cline{1-4} & & & 0 & \end{array}$$

Actividad resuelta

Razonamiento

7. ¿Un ejemplo de división exacta es $(x^3 - 5x - 12) \div (x - 3)$?

Solución:

Para comprobar esta afirmación, se realiza la división así:

$$\frac{x^3 - 5x - 12}{x - 3} = x^2 + 3x + 4$$

Se obtiene como residuo la cantidad 0; por lo tanto, esta división es exacta.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular divisiones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Actividad resuelta

Razonamiento

8 Comprueba si esta división es correcta $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x + 2$.

Solución:

Para comprobar si la división es correcta, se deben realizar estos pasos:

a. Multiplicar el polinomio cociente por el polinomio divisor. $(x + 2)(x - 1) =$

b. Al producto obtenido se le agrega el residuo de la división. En este caso es 0. $(x^2 + x - 2) + 0 =$ $x^2 + x - 2$

c. El resultado debe ser igual al dividendo. $x^2 + x - 2$ no es igual a $x^2 - 3x + 2$

Por lo tanto, la división no es correcta.

Ten en cuenta

En una división entre polinomios, el grado del polinomio divisor debe ser menor o igual que el grado del polinomio del dividendo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

9 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $(a^2 + 3a + 2) \div (a + 1)$

b. $(6x^2 + 16x + 8) \div (3x + 2)$

c. $(6a^2 + a - 2) \div (2a - 1)$

d. $(4x^2 - 36) \div (2x - 6)$

e. $(3y^5 + 2y^2 - 12y - 4) \div (y^2 - 2)$

f. $(y^2 - 11y + 28) \div (y - 4)$

g. $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

h. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$

i. $(3y^3 + 18y^2 - 5y - 30) \div (y + 6)$

10 A continuación se muestran en desorden los pasos que se deben seguir a la hora de hacer divisiones entre polinomios. Ordénalos numerándolos de 1 a 4.

( ) Se restan las cantidades.

( ) Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

( ) Se multiplica todo el divisor por el término del cociente hallado anteriormente y este producto se resta del dividendo.

( ) Se ordenan los términos del divisor y el dividendo en potencias descendientes con respecto a una variable.

Razonamiento

11 Comprueba las divisiones y, en caso de que estén erradas, corrígelas.

a.

$$\begin{array}{rrr|l}
y^2 & +\,6y & +\,8 & \;y + 2 \\ \cline{4-4}
-\,y^2 & -\,2y & & \;y + 4 \\ \cline{1-3}
 & 8y & +\,8 & \\
 & -\,8y & -\,16 & \\ \cline{1-3}
 & & -\,8 &
\end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rrr|l}
a^2 & +\,7a & +\,10 & \;a + 2 \\ \cline{4-4}
-\,a^2 & -\,2a & & \;a + 5 \\ \cline{1-3}
 & 5a & +\,10 & \\
 & -\,5a & -\,10 & \\ \cline{1-3}
 & -\,10a & -\,20 &
\end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rrr|l}
6x^2 & -\,5x & +\,5 & \;2x + 3 \\ \cline{4-4}
-\,6x^2 & -\,9x & & \;3x - 7 \\ \cline{1-3}
 & -\,14x & +\,5 & \\
 & -\,14x & -\,21 & \\ \cline{1-3}
 & -\,28x & -\,16 &
\end{array}$$

Resolución de problemas 

12 Una caja con forma de prisma recto tiene un volumen representado por la ecuación $y^3 - y^2 + 4y - 4$. Considerando que el área de la base es $y^2 + 4$, resuelve.

a. Realiza un dibujo que represente la situación.

b. Calcula la expresión algebraica que representa la altura de la caja.

7 Cocientes notables

Explora

La aceleración en la caída de un paracaidista, a cierta altura, puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2 - 64}{v - 8}$$

En esta, a es la aceleración y v es la velocidad de la caída.



- ¿Cuál es la expresión relacionada con la aceleración?

Para resolver la situación, se divide la expresión $v^2 - 64$ entre $v - 8$. Observa:

$$\begin{array}{rrr|l} v^2 & & -64 & v-8 \\ \cline{4-4} -v^2 & +8v & & v+8 \\ \cline{1-3} & +8v & -64 & \\ & -8v & +64 & \\ \cline{1-3} & & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, $(v^2 - 8^2) \div (v - 8) = (v + 8)$.

Esta expresión cumple con una generalidad que se aplica a los cocientes que cumplen ciertas características. Este tipo de divisiones se conocen como **cocientes notables**.

7.1 Generalidades de los cocientes notables

- Cuando se aplica el cociente de la suma o la diferencia de cuadrados entre la suma o la diferencia de sus raíces cuadradas, se cumple que:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \qquad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Ejemplo 1

Halla el siguiente cociente:

$$\frac{1 - m^4}{1 + m^2}$$

Aplicando la relación, la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual a la resta del binomio de las cantidades. Entonces, el resultado es $1 - m^2$.

Ejemplo 2

Resuelve $\frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) - z}$.

Para este caso, como ambos binomios presentan una diferencia, entonces tenemos que el resultado de la división es $(x + y) + z$.

- Cuando se aplica el cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

- Al aplicar el cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Ejemplo 3

Divide $\frac{64n^3 + m^3}{4n + m}$ y $\frac{64n^3 - m^3}{4n - m}$.

Aplicando la regla, obtenemos:

- $(4n)^2 - 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$
- $(4n)^2 + 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$

Ten en cuenta

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(2a + b)^2 = (b + 2a)^2$

$(2a - b)^2 = (b - 2a)^2$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Ejemplo 4

Observa el resultado $x^2 + xy + y^2$. Este pertenece al cociente $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$, ya que la diferencia de los cubos de dos términos, dividido por la diferencia de esta, es igual al primer término elevado al cuadrado, más el primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

- Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades.

Para los cocientes $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$, se tiene lo siguiente:

a. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a - b$ para los valores pares o impares de n. Así: $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}$.

b. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores pares de n. Observa: $\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}$.

c. El polinomio $a^n + b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores impares de n. Así: $\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}$.

Ejemplo 5

Al establecer el cociente de $\frac{x^5 - y^5}{x - y}$, se debe tener en cuenta que todos los signos del cociente son positivos (+) y que el polinomio cociente es:

$$x^4 + x^3 y^1 + x^2 y^2 + x^1 y^3 + y^4.$$

Ejemplo 6

Al hallar el cociente de $\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$, se debe considerar que, en este caso, los términos del cociente tienen signos alternos empezando por el signo positivo.
Por lo tanto:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2} = x^4 - x^2 y^2 + y^4$$

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Resuelve los cocientes notables que se presentan a continuación.

a. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$ b. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^5 + y^5}$ c. $\frac{x^{12} - y^{12}}{x^4 - y^4}$

Solución:

a. $x^{12} - x^9 y^3 + x^6 y^6 - x^3 y^9 + y^{12}$

b. $x^{10} - x^5 y^5 + y^{10}$

c. $x^8 + x^4 y^4 + y^8$

Ten en cuenta

Productos notables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CULTURA del Buen Vivir



La comunicación

Existen muchas y variadas formas de comunicación, por ello es muy importante, aprender a interpretar los símbolos e ideas y a razonar con respecto al mensaje que nos están transmitiendo.

- Piensa en el tipo de información que recibes a diario y la manera en la que influyen en tu manera de pensar y actuar.

7 Cocientes notables

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{1 - n^4}{1 + n^2}$ b. $\frac{9 - x^4}{3 - x^2}$

c. $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ d. $\frac{25 - 36x^4}{5 - 6x^2}$

e. $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ f. $\frac{y^2 - x^2}{y + x}$

3 Desarrolla los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$ b. $\frac{x^{10} - m^{10}}{x^2 + m^2}$

c. $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ d. $\frac{x^9 + y^9}{x^3 + y^3}$

e. $\frac{x^{18} + y^{18}}{x^9 + y^9}$ f. $\frac{1 + a^3}{1 + a}$

Comunicación

4 Explica con tus palabras cómo desarrollarías los cocientes notables que se muestran a continuación.

a. $\frac{1 - a^2b^4c^8}{1 - ab^2c^4}$

b. $\frac{(a + x)^2 - y^2}{(a + x) - y}$

c. $\frac{n^6 + 1^3}{n^2 + 1}$

5 Indica cuál es el cociente notable que se desarrolló en cada caso.

a. $\frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y} = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

....

b. $\frac{n^6 + 1}{n^2 + 1} = n^4 - n^2 + 1$

....

c. $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$

....

d. $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} = 25y^2 + 30y + 36$

....

e. $\frac{1 + a^3}{1 + a} = x^2 + x^1 + 1$

....

Ejercitación

6 Completa las igualdades.

$\frac{y^4 + 16}{y + 2}$	=	
	=	$\frac{x^3 - 64}{x - 4}$
$\frac{9a^2 - 9}{3a - 3}$	=	
	=	$\frac{5m^4 + 625}{m + 5}$

7 Resuelve las siguientes operaciones a partir de las reglas de los cocientes notables.

a. $\frac{a^3 + 2^3}{a + 2}$ b. $\frac{m^4 - n^4}{m - n}$

c. $\frac{216 + r^3}{6 + r}$ d. $\frac{64 - s^2}{8 - s}$

e. $\frac{p^6 - q^6}{p - q}$ f. $\frac{b^5 + 243}{b + 3}$

Razonamiento

8 Calcula el cociente notable en cada caso.

a. $\frac{x^{18} - y^{18}}{x^3 - y^3}$

b. $\frac{m^{27} + n^{27}}{m^3 + n^3}$

c. $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$

9 Relaciona las columnas.

Cociente notable	Resultado
$\frac{4x^2 - 121}{2x + 11}$ ▢	▢ $\sqrt{3a^{2x}} - 3b^y$
$\frac{9a^4b^2 - 16a^2b^6}{3a^2b - 4ab^3}$ ▢	▢ $3a^2b + 4ab^3$
$\frac{3a^{4x} - 9b^{2y}}{3b^y + \sqrt{3a^{2x}}}$ ▢	▢ $2x - 11$
$\frac{a^3 - 27b^3}{3a - 9b}$ ▢	▢ $\frac{1}{3}[a^2 + (a)(3b) + (3b)^2]$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

10 Completa los cocientes con los correspondientes exponentes de las potencias.

a. $\frac{a^{\square} - b^{\square}}{a - b}$ b. $\frac{x^{\square} + y^{\square}}{x + y}$

c. $\frac{r^{\square} + s^{\square}}{r + s}$ d. $\frac{m^{\square} - n^{\square}}{m - n}$

11 Completa la tabla.

Cocientes notables	Cociente
$\frac{m^5 + n^5}{m + n}$	
	$a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$
$\frac{x^6 - y^6}{x - y}$	$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
$\frac{64a^3 + 343}{4a + 7}$	
	$36 - 30y + 25y^2$
$\frac{8a^3 - 1}{2a - 1}$	
$\frac{x^3 - 1}{x - 1}$	

Tabla 1

Comunicación

12 Escribe el literal que le corresponde a cada ejemplo según la descripción.

◯ $\frac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1}$ ◯ $\frac{1 - v^{12}}{1 - v^4}$

◯ $\frac{m^3 - 1}{1 + m}$ ◯ $\frac{1 - z^8}{1 - z^4}$

Cocientes notables
a. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
b. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.
c. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
d. Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.

13 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada producto notable.

a. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$
$= x^{12} - y^{12}x^9 + y^6x^6 - y^9x^3 + y^{12}$

b. $\frac{x^4 + 1}{1 + x^2}$
$= x^2 + 1$

c. $\frac{8m^3 + n^6}{2m + n^2}$
$= 4m^2 + 2mn^2 + n^4$

d. $\frac{9 - x^4}{3 - x^2}$
$= 3 + x^3$

e. $\frac{a^8 - b^8}{a + b}$
$= a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7$

14 Relaciona cada personaje con el hecho histórico que le corresponde.

a. François Viète $\frac{9 - n^4}{3 - n^2}$

b. John Napier $\frac{1 + m^3}{1 + m}$

c. Pierre Fermat $\frac{8m^3 - 1}{2m - 1}$

d. Arquímedes $\frac{m^2 - n^2}{m - n}$

◯	Fundamentó la hidrostática.	$m + n$
◯	Enunció la fórmula para las ecuaciones de sexto grado.	$3 + n^2$
◯	Introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de los números enteros.	$1 - m - m^2$
◯	Fue llamado "el primer cerebro del mundo" por Pascal.	$4m^2 - 2m + 1$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

15 En física, la velocidad V se define como la distancia d recorrida por un móvil en la unidad de tiempo t. Así, $V = \frac{d}{t}$.

- Si un auto recorre una distancia $d = x^7 - y^7$ en un tiempo $t = x - y$, ¿cuál es la expresión algebraica para su velocidad?

Prueba Ser Estudiante



A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Sí con x representamos manzanas y con y peras. la expresión matemática que indica lo que se debe pagar por la compra de 14 manzanas y 8 peras, en una frutería se venden 4 manzanas por un dólar y 6 peras por un dólar es:

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{6}$

B. $\frac{4x}{3} + \frac{7y}{2}$

C. $\frac{7x}{2} + \frac{4y}{3}$

D. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4}$

2. La expresión algebraica que muestra el área de un rectángulo cuya base es 3 unidades mayor que su altura es:

A. $x^2 + 3x$

B. $3x^2 + x$

C. $3x + 6$

D. $x + 6$

3. La expresión algebraica que indica el perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son $2x + 5$ y el tercer lado es $3x - 4$ es:

A. $8x - 3$

B. $7x + 14$

C. $5x + 1$

D. $7x + 6$

4. En una librería se venden a $4,5 la caja de pinturas y a $0,60 los cuadernos, si con x representas las cajas de pinturas y con y los cuadernos, la expresión que muestra lo que debemos pagar por 4 cajas de pinturas y 10 cuadernos es:

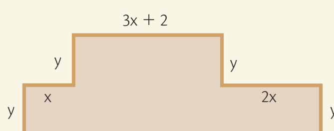
A. $49x + 30y$

B. $18x + 6y$

C. $9x + 3y$

D. $8x + 50y$

5. La expresión que representa el perímetro de la figura es:



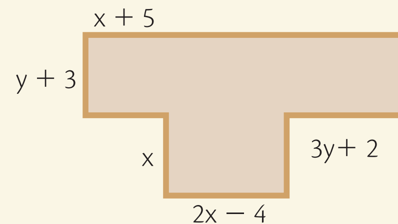
A. $6x + 2y + 6$

B. $6x + 4y + 2$

C. $12x + 4y + 4$

D. $8x + 8y + 10$

6. La expresión que representa el perímetro de la figura es:



A. $8x + 8y + 12$

B. $6x + 8y + 6$

C. $4x + 10y + 8$

D. $10x + 8y + 10$

7. La expresión que representa el área de un rectángulo cuya base es el doble de su ancho disminuido en 4 es:

A. $x^2 + 4x$

B. $4x^2 - x$

C. $x^2 + 4x$

D. $2x^2 - 4x$

8. Rafael recibió 12a+7 dólares al inicio de la semana, si gastó en colaciones 3a-12 y en pasajes 4a+6, la expresión que representa el dinero que le queda es:

A. $5a + 21$

B. $6a + 35$

C. $5a + 13$

D. $2a + 14$

9. Un autobús recorre cuatro distancias: $4ab - 3bc + 4cp$, luego $2bc + 2cp - 3pq$, luego $4bc - 3ab + 3pq$ y por último $ab - bc - 6cp$, la distancia total recorrida por el autobús corresponde a la expresión:

A. $3ab - 2bc + cp - 6pq$

B. $ab - 2bc + 2cp$

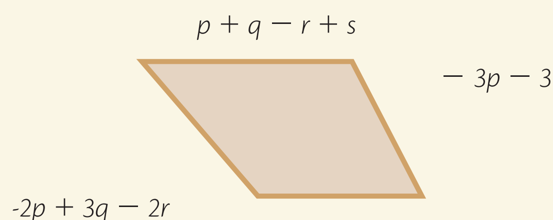
C. $4ab - bc$

D. $ab + 2bc$

Indicadores de logro:

- Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos
- Expresa polinomios como la multiplicación de polinomios
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales
- Soluciona expresiones numéricas y algebraicas con productos notables
- Aplica las propiedades algebraicas de las operaciones y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas, atiende correctamente la jerarquía de las operaciones.

10. Si el perímetro de la figura es: $-3p + 2r$ determine la longitud del lado desconocido



A. $7p - q + r - s$

B. $2p - 3q + r - 2s$

C. $p + 2q + r - 3s$

D. $3p - q - 2r + s$

11. Si un lado de un rectángulo se representa con el polinomio $4a - 3b$ y el otro lado con el polinomio $5b - 2a$, la expresión que representa su área es:

A. $10a^2 - 21ab + b^2$

B. $5a^2 - 9ab + 6b^2$

C. $20a^2 + 23ab + b^2$

D. $-8a^2 + 26ab - 15b^2$

12. La expresión que sumada a $w^3 - w^2 + 5$ me da $3w - 6$ es:

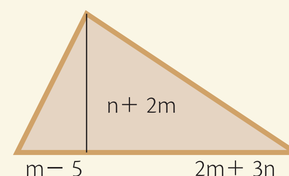
A. $-w^3 + w^2 + 3w - 11$

B. $2w^2 - 3w + 5$

C. $3w + 11$

D. $-2w$

13. La expresión que corresponde al área de la figura es



A. $6m^2 + mn - n^2$

B. $2m^2 + 3mn - 2n^2$

C. $6m^2 - mn - 2n^2$

D. $6m^2 + mn - y^2$

14. La expresión que tendíamos que restar de $x^4 - 3xy^3 + 6y^4$ para que la diferencia sea $4x^2y^2 - 8$ es:

A. $4x^2y^2 + xy^3 + 4y^4 + 6$

B. $X^4 - 4x^2y^2 - 3xy^3 + 6y^4 + 8$

C. $X^4 - 3xy^3 + 4y^4 + 6$

D. $2X^4 - x^2y^2 - 3xy^3 + 6y^4$

15. La expresión que corresponde al área de un terreno rectangular es $y^2 - 11y + 30$, si se conoce que uno de sus lados es $y - 6$, el otro lado es:

A. $y - 5$

B. $y + 3$

C. $y - 4$

D. $y + 1$

16. Si el área de un rectángulo es $4m^2 - n^2r^4$ y uno de sus lados es $2m - nr^2$, entonces el segundo lado es:

A. $m^2 + n^2r^2$

B. $2m + nr^2$

C. $m - nr$

D. $2m - nr$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Diseña un pachisi matemático

El pachisi es un juego de mesa reconocido por ser una actividad lúdica y entretenida que permite la participación de varios jugadores. Es un juego tradicional creado en la india.

La dinámica del juego consiste en partir de un punto fijo (cárcel), con cuatro fichas de un mismo color, cruzándose en el camino con celdas seguras y espacios en los que las fichas quedan expuestas. El avance se da según la cifra total que se obtiene al lanzar un par de dados numerados del uno al seis. Gana quien lleve a la meta las cuatro fichas del color correspondiente.



SM Ediciones

Acuerdos para diseñar un pachisi matemático

Habla con tus compañeros sobre las características que debe cumplir un pachisi matemático, pero que no se aleje del modelo tradicional de este popular juego.


SM Ediciones

1 Estructura del pachisi matemático

Procura que los pachisi que traigan, tú y tus compañeros cumplan con las especificaciones de un pachisi tradicional, este debe tener: cuatro fichas de colores diferentes por cada jugador, dos dados numerados del uno al seis, recuadros específicos para cárcel, puntos de salida, seguros y llegadas.

Acuerda con tu profesor el tipo de ejercicios matemáticos que van a ser utilizados en el diseño del pachisi matemático.

2 Reglas básicas del pachisi

Para diseñar un pachisi matemático debes tener en cuenta las reglas de juego que delimitan la participación. Las más comunes son las siguientes:

a. Salir de la cárcel: para ello se lanzan los dados tratando de obtener números pares, solo existen tres oportunidades por cada turno.

b. "Echar a la cárcel": "echar a la cárcel" pone interés al juego, esto solo se logra si en el recorrido, un jugador ubica su ficha en una celda ocupada por otro participante, a menos que este se encuentre en un punto seguro.

c. "Asegurarse": es una ventaja y a su vez una estrategia para evitar que las fichas propias, sean enviadas a la cárcel. Se deben buscar estrategias para evitar que las fichas queden en celdas desprotegidas.

d. "Soplar": es un sinónimo coloquial de denunciar. El sujeto que "sopla" puede ser cualquier participante que observe que se incumple alguna de las anteriores reglas.

Pregúntale a tus familiares o amigos si conocen otras reglas para el juego del pachisi. Haz una lista y preséntalas ante tus compañeros como aporte para desarrollar tu pachisi matemático.

3 Dificultad matemática



Una forma de hacer el juego acorde con tu clase de matemáticas, es proponer operaciones en cada una de las situaciones que representen beneficios para los jugadores. Por ejemplo: si un jugador tiene la posibilidad de iniciar la partida o salir de la cárcel, debe sustentar su beneficio resolviendo algunos ejercicios matemáticos según el tema propuesto por el profesor. Para lograrlo se puede:

a. **Crear tarjetas de penalización:** como el pachisi tiene una meta o punto de llegada en el centro del tablero, se puede aprovechar este espacio para ubicar tarjetas con las operaciones que deberá resolver quien desee hacer uso de algún beneficio en el juego tras el lanzamiento de dados. Para ello es necesario crear varias tarjetas, y que los ejercicios sean claros y de rápida ejecución. Además, se pueden clasificar por dificultades, es decir: crear unas para cada regla y separarlas en colores así:

Tarjeta **VERDE**



Aplicación: Salir / enviar de / a cárcel

Tarjeta **AMARILLA**



Aplicación: asegurar y "soplar"

Tarjeta **ROJA**



Aplicación: último seguro y llegada

b. **Dificultar las zonas seguras:** se pueden marcar las zonas de seguro con colores y poner grados de dificultad según el avance de los jugadores. Cada celda de color puede representar una tarjeta. Para ajustar el tablero se puede usar cinta de enmascarar y marcadores de colores según el grado de dificultad. Ten en cuenta las nuevas reglas que propongan para el juego.

Trabajo en grupo

Revisen y concluyan

La lúdica es una herramienta que puede aportar al desarrollo del pensamiento matemático. Con ella se pueden diseñar nuevas formas de jugar y compartir con tus compañeros, ya sea en matemáticas o en otras áreas. Aprender siempre será divertido si haces que el aprendizaje sea más entretenido.



SM Ediciones

1. ¿Consideran que el juego les mostró una manera diferente y llamativa de aprender matemáticas? Comparte con tus compañeros y profesor tu respuesta.

....

....

2. ¿Aplicarían el pensamiento matemático a otros juegos? ¿En cuáles?

....

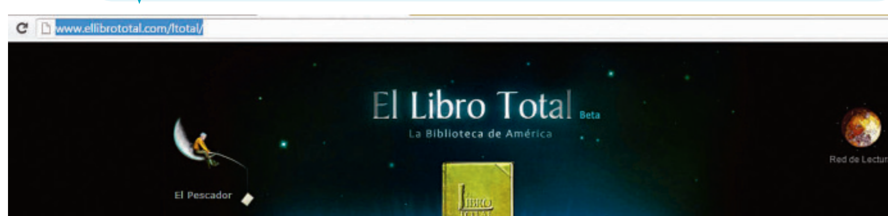
Habilidades digitales



Te invitamos a dar un recorrido por una biblioteca virtual-interactiva donde encontrarás información de primera fuente.

Sabías que existen fuentes principales para obtener información confiable. Esta es una de ellas, la biblioteca. Sigue el URL

http://www.ellibrototal.com/ltotal/



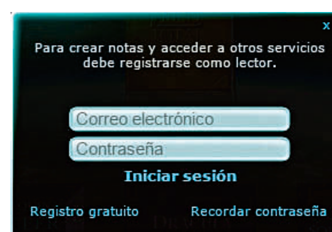
1 Ingresa a la página www.ellibrototal.com

a. .Escribe tu correo electrónico.

b. Escribe tu contraseña.

c. Haz clic en iniciar sesión.

d. Obtendrás todos los beneficios de este sitio. Libros electrónicos, donde podrás crear notas, escuchar música



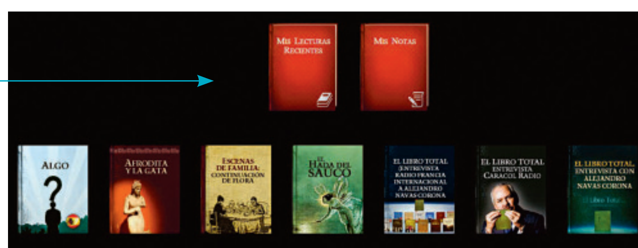
2 Da un breve recorrido por el catálogo de autores

a. aquí encontrarás las obras en orden alfabético, si le das clic podrás escuchar o leer y ver arte.



3 Mis lecturas recientes.

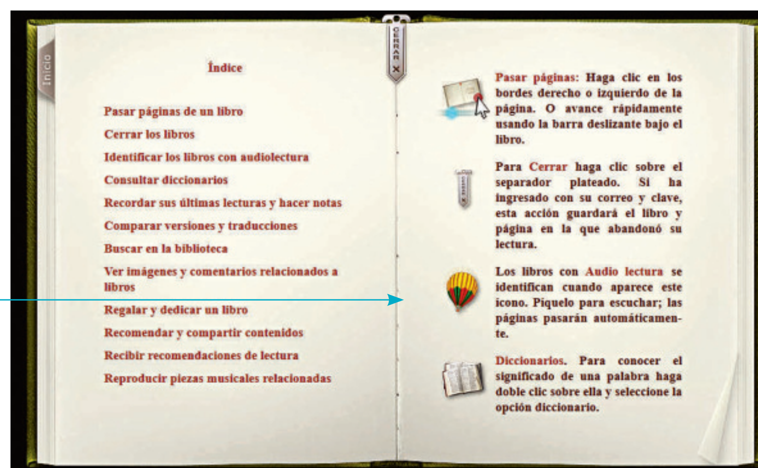
a. Has hojeado o leído alguna obra, quedará registrada con hora y fecha en esta bitácora.



4 Buscas ayuda

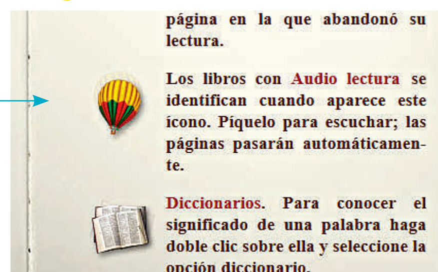
a. Si necesitas AYUDA para interactuar en este sitio, puedes acceder al índice del Libro Total.

b. Aquí se encuentra una amplia descripción de sus iconos.



5 Audio libros

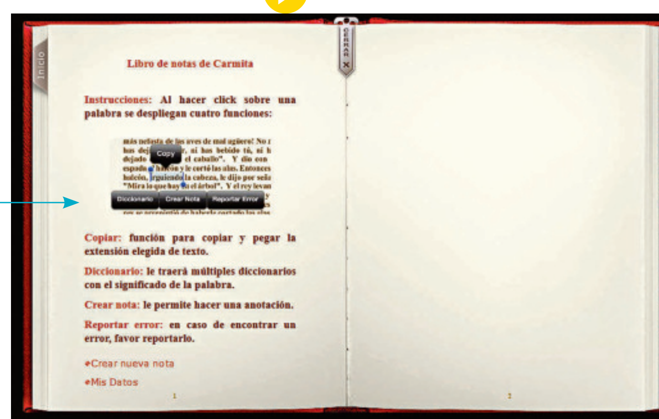
a. Te recomiendo los audios libros, son fantásticos, elige el icono del GLOBO para el audio lectura, la disfrutaras.



6 Libro de notas

a. Este es el Libro de notas del Usuario.

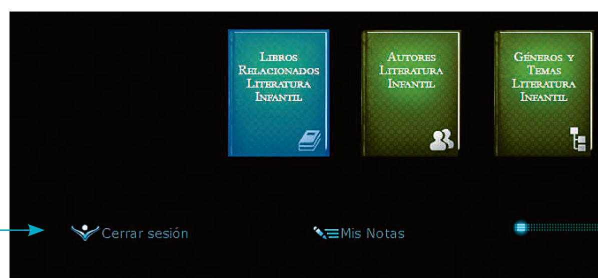
b. Aquí tienes tres opciones, el diccionario, crear notas y reportar errores.



7 Cerrar sesión.

a. Si quieres dejar el sitio, luego de haber leído, basta con Cerrar sesión.

b. Pero recuerda te estaremos esperando para disfrutar de más lectura.



Evaluación de la Unidad



Expresiones algebraicas

Ejercitación

1. Relaciona cada expresión con la forma algebraica que la representa.

a. El volumen de un cubo. $4x$

b. El triple de un número. $2(x + 1)$

c. El perímetro de un cuadrado. $3x$

d. El doble de un número impar. x^3

Resolución de problemas

2. En un movimiento rectilíneo uniforme, la distancia es igual a la velocidad por el tiempo.

Si un vehículo viaja a 50 km/h, ¿qué distancia habrá recorrido al cabo de dos horas y media?

Polinomios

Razonamiento

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F), según corresponda.

a. El grado absoluto de un polinomio puede ser igual a cero. ( )

b. Si el grado absoluto de un polinomio es dos, entonces la expresión tiene dos variables. ( )

c. El grado relativo con relación a una variable es el mayor exponente de dicha variable. ( )

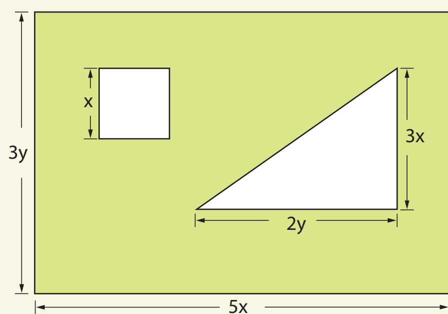
d. El grado absoluto de un polinomio es igual a la suma de los grados relativos de sus variables. ( )

e. El término independiente de un polinomio es el término de grado cero. ( )

Adición y sustracción de polinomios

Modelación

4. Selecciona el polinomio que representa el área de la región sombreada.



a. $-12y$

b. $12xy - x^2$

c. $18xy - x^2$

d. $2x - y - x^2$

Ejercitación

5. Indica la expresión que falta en la sustracción.

$$\begin{array}{r} \square \\ -(2x + 8y + 1) \\ \hline 3x - 9y + 3 \end{array}$$

a. $x - 17y + 2$

b. $x - y + 2$

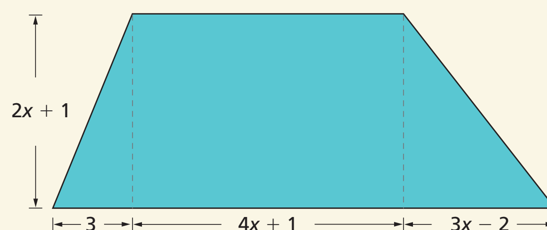
c. $-x - y + 4$

d. $5x - y + 4$

Multiplicación de polinomios

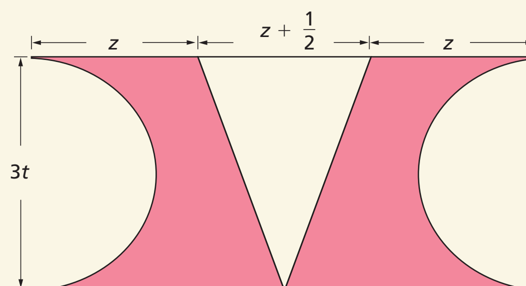
Comunicación

6. Halla una expresión para determinar el área del polígono.



Ejercitación

7. Plantea el polinomio que representa el área sombreada de la siguiente figura.



Productos notables

Ejercitación

8. Determina y elige el factor que hace válida la igualdad.

$$(4z - w)\,\square = 16z^2 - 8zw + w^2$$

a. $4z - w$

b. $4z + w$

c. $4z - 8 + w$

d. $4z + 8 + w$

Razonamiento

9. ¿Se puede afirmar que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$? Explica tu respuesta

Indicadores de logro:
- Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos
- Expresa polinomios como la multiplicación de polinomios
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales
- Soluciona expresiones numéricas y algebraicas con productos notables
- Aplica las propiedades algebraicas de las operaciones y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas, atiende correctamente la jerarquía de las operaciones.

Productos notables

Ejercitación

10. Relaciona las columnas

a. $(2x+y)^2$	$4x^2+4xy+y^2$
b. $(3x+2y)(3x-2y)$	$X^3-9x^2y+27xy^3+27y^3$
c. $(x-3y)^3$	$x^2+2xy+y^2$
d. $(x-y)^2$	$27X^3+27x^2y+9xy^3+y^3$
e. $(3x-y)^3$	$9x^2-4y^2$

División de polinomios

Razonamiento

11. Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. $27x^3-8$ es divisible entre $3x-2$. ( )

b. $x-1$ es divisor de $(x+1)^2$ ( )

c. $x+2$ es divisor de x^2-6x-16 ( )

d. x^3+3x^2-1 es divisible entre $x-1$ ( )

e. $2x^2+3xy$ es divisible entre x^2 ( )

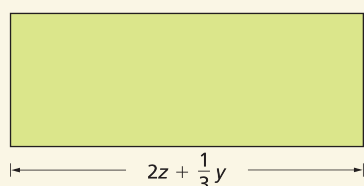
Modelación

12. Determina una las dimensiones del rectángulo, teniendo en cuenta que su área es igual a $2x^2+4x+\frac{3}{2}$.



Resolución de problemas

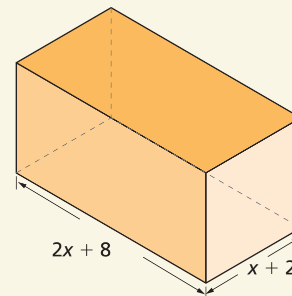
13. Determina la expresión que relaciona la cantidad de alambre para cercar el terreno, considerando que su área total es igual a $6z^2-\frac{1}{6}y^2$.



Regla de Ruffini

Resolución de problemas

14. Determina las dimensiones de la caja si el volumen es igual a $6x^3+40x^2+72x+32$.



Teorema del residuo y teorema del factor

Ejercitación

15. Utiliza el teorema del residuo y determina cuáles divisiones son exactas.

a. $(3x^3+2x^2y+3xy^2+6xy+9x^2)\div(x+3)$

b. $(2z^4+4z^3-2z^2w+z-4zw+2)\div(z+2)$

c. $(y^5+3y^4+2y^3-5y^2-4y-1)\div(y+1)$

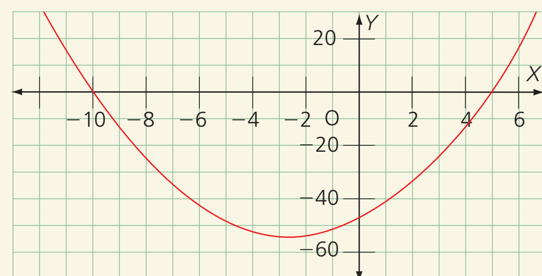
d. $(y^4+5y^3+9y^2+7y+2)\div(y+2)$

e. $(t^3+t^2x-4t-tx+3)\div(t-1)$

Raíces de un polinomio

Comunicación

16. Observa la gráfica de la expresión $x^2+5x-50$.



Determina las raíces del polinomio y establece una relación con la gráfica.

Cocientes notables

Razonamiento

17. Indica el cociente de: $(243m^5-32n^5)/(3m-2n)$.

a. $3m^4+6m^3n+6m^2n^2+6mn^3+2n^4$

b. $81m^4+18m^3n+24m^2n^2+18mn^3+16n^4$

c. $81m^4+18m^3n+36m^2n^2+18mn^3+16n^4$

d. $81m^4+54m^3n+36m^2n^2+24mn^3+16n^4$

3

BLOQUE

Álgebra
y funciones

Factorización y ecuaciones

La factorización de expresiones algebraicas tiene múltiples aplicaciones matemáticas, ya que permite simplificar expresiones complejas, resolver ciertas clases de ecuaciones y calcular límites y derivadas de funciones de manera más sencilla.

- Consulta acerca del significado de la palabra "factorizar".



Cultura del Buen Vivir

La confianza

La confianza implica seguridad en que los resultados de una situación o conducta será favorable a nivel personal o grupal.

- ¿En cuáles situaciones de la vida cotidiana consideras que es necesario tener confianza en ti o en los demás?

Aprenderás...

- Factorización de polinomios
- Factorización de trinomios
- Ecuaciones
- Inecuaciones

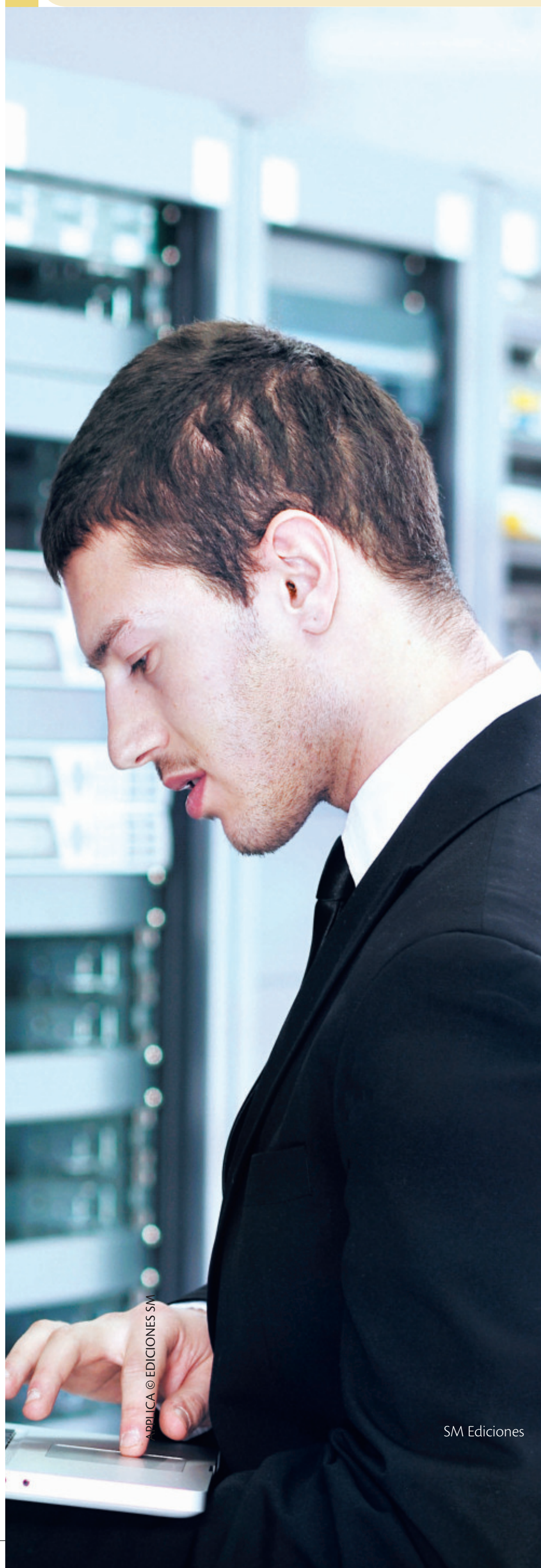
Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

El RSA y la factorización

El algoritmo de clave pública RSA fue creado en 1977 por Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adelman. Es el sistema criptográfico asimétrico más conocido y usado. Los tres analistas se basaron en el artículo de Diffie-Hellman sobre sistemas de llave pública, crearon su algoritmo y fundaron la empresa RSA Data Security Inc., que es actualmente una de las más prestigiosas en el entorno de la protección de datos.

El sistema RSA se basa en el hecho matemático de la dificultad de factorizar números muy grandes. Para factorizar un número, el sistema más lógico consiste en empezar a dividir sucesivamente este entre 2, entre 3, entre 4,..., y así sucesivamente, buscando que el resultado de la división sea exacto, es decir, de resto 0, con lo que ya tendremos un divisor del número.

Ahora bien, si el número considerado es un número primo (el que solo es divisible por 1 y por él mismo), tendremos que para factorizarlo habría que empezar por 1, 2, 3... hasta llegar a él mismo, ya que por ser primo ninguno de los números anteriores es divisor suyo. Además, si el número primo es lo suficientemente grande, el proceso de factorización es complicado y lleva mucho tiempo. [...]

El cálculo de estas claves se realiza en secreto en la máquina en la que se va a guardar la clave privada y, una vez que es generada, conviene protegerla mediante un algoritmo criptográfico simétrico.

Networking and Emerging Optimization (2015). RSA. España: Recuperado de http://neo.lcc.uma.es/evirtual/cdd/tutorial/presentacion/rsa.html

Actividades

Interpreta

1. ¿En qué hecho matemático se basa el sistema RSA?

Argumenta

2. Los sistemas criptográficos como el RSA se usan para enviar mensajes de manera confidencial. ¿Por qué crees que se generó esta necesidad?
3. ¿Qué aspectos consideras que debe tener un sistema criptográfico que genere confianza en su uso?

Propón

4. Reúnete con un compañero y creen un lenguaje secreto. Luego, compárenlo con el trabajo hecho por otros de sus compañeros de clase.

1 Factorización de polinomios. Factor común

Explora

Isabela dibujó en su cuaderno un rectángulo cuya superficie mide doce centímetros cuadrados.

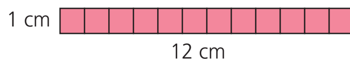
- ¿Cuáles podrían ser las medidas de los lados del rectángulo que dibujó Isabela en su cuaderno?

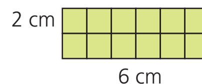
Para calcular las dimensiones del rectángulo que dibujó Isabela, se debe factorizar el número 12. Es decir, se debe escribir el número 12 como el producto de otros números.

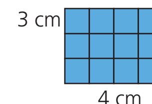
Entonces, se buscan los factores de 12 y se expresa el número como producto de ellos. De esta forma se obtiene que:

$12 = 1 \times 12$ $12 = 2 \times 6$ $12 = 3 \times 4$

Por lo tanto, el rectángulo que dibujó Isabela puede tener estas dimensiones: 1 cm y 12 cm; 2 cm y 6 cm; 3 cm y 4 cm.







Factorizar un número consiste en expresarlo como producto de sus factores.

1.1 Factores primos

Al considerar un grupo de factores del número 12, como el 2 y el 6, se tiene que el primero es primo, pero el segundo no. Sin embargo, el 6 a su vez se puede expresar como el producto entre 2 y 3, que sí son números primos. Por lo tanto:

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3.$$

número — factores primos — expresión corta

Ten en cuenta

Un número es primo cuando tiene solo dos divisores: la unidad y sí mismo.

La expresión de un número como producto de sus factores primos se llama **descomposición en factores primos.**

Al calcular los **factores primos** de un número, se debe comenzar por los factores menores. Después de seleccionar el menor de los factores primos, se divide el número entre este. Luego, se divide el cociente obtenido por otro factor primo y se repite el procedimiento hasta que el cociente sea 1.

Entonces, el número es igual al producto de los factores primos entre los que se dividió.

Ejemplo 1

La descomposición del número 90 en sus factores primos se hace de esta manera:

División	Factores
90 ⌊2 10 45 0	$90 = 2 \times 45$
45 ⌊3 15 15 0	$45 = 3 \times 15$
15 ⌊3 0 5	$15 = 3 \times 5$
5 ⌊5 0 1	$5 = 5 \times 1$

Descomposición

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Por lo tanto, la descomposición en factores primos de 90 es $2 \times 3^2 \times 5$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

1.2 Máximo común divisor

El mayor de los divisores comunes de dos o más números naturales se llama **máximo común divisor**. Se designa con la expresión **m.c.d.**

Un procedimiento sencillo que se utiliza para encontrar el m.c.d. de dos o más números es la descomposición en factores primos.

Ejemplo 2

Para hallar el m.c.d de 12, 18 y 20, primero se descomponen los números en sus factores primos. Es decir:

$12 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2$ $20 = 2^2 \times 5$

Luego, se toman todos los factores comunes elevados al menor exponente. En este caso, el único factor que tienen en común los tres números es el 2.

Por lo tanto, el m.c.d.(12, 18, 20) = 2.

Ten en cuenta

Si dos números solo tienen como divisor común el 1 se dice que son **primos entre sí**, y entonces su máximo común divisor es igual a 1.

1.3 Mínimo común múltiplo

El menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, de dos o más números naturales se llama **mínimo común múltiplo** y se abrevia con la expresión **m.c.m.**

Para hallar el m.c.m. de dos o más números, estos se descomponen en factores primos.

Ejemplo 3

El m.c.m. de los números 12, 18 y 20 se calcula factorizando los números. Es decir:

$12 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2$ $20 = 2^2 \times 5$

Después, se toman los factores comunes y no comunes de los números elevados al mayor exponente. En este caso son: 2^2, 3^2 y 5.

Se calcula el producto entre estas potencias y el resultado es el m.c.m.

Por lo tanto, m.c.m.(12, 18, 20) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

Ten en cuenta

El conjunto de los divisores de un número natural es finito. Por su parte, el conjunto de los múltiplos de un número natural es infinito.

1.4 Factor común de un polinomio

Para calcular el **factor común de un polinomio,** se halla el máximo común divisor de los coeficientes y se multiplica por el máximo común divisor de la parte literal.

Ejemplo 4

Para factorizar el polinomio $3x^3 + 12x^2 + 6x$ por el factor común se debe:

- Determinar el factor común de los coeficientes del polinomio.
  $\mathbf{3}x^3 + \mathbf{12}x^2 + \mathbf{6}x$
  m.c.d.(3, 12, 6) = 3
- Hallar el máximo común divisor de la parte literal del polinomio.
  $3\boldsymbol{x^3} + 12\boldsymbol{x^2} + 6\boldsymbol{x}$
  m.c.d.$(x^3, x^2, x) = x$
- Expresar el polinomio como el producto entre el factor común y el cociente de dividir cada término entre este factor.

factor común: es el producto del coeficiente común por la parte literal común.

$3x\,(x^2 + 4x + 2)$

cociente: es el resultado de dividir el polinomio entre el factor común.

Ten en cuenta

Cuando un polinomio no se puede expresar como producto de otros de menor grado, se dice que es un **polinomio irreducible**.

1 Factorización de polinomios. Factor común

Ten en cuenta

El factor común de un polinomio puede estar constituido solamente por un número, por una variable o por un término con parte literal y numérica.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Factoriza los siguientes polinomios por el factor común.

a. $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$ b. $24x^2 + 12xy$

Solución:

a. $7xy(2x^3 + y + 3)$ b. $12x(2x + y)$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Descompón cada número en sus factores primos.

a. 84 b. 96 c. 24
d. 301 e. 47 f. 25
g. 120 h. 140 i. 200
j. 225 k. 320 l. 400

3 Halla el m.c.d. de cada grupo de números.

a. 21 y 24
b. 32 y 47
c. 128, 36 y 246
d. 200, 1 000 y 450
e. 321, 211, 422 y 95
f. 89, 98, 34, 56 y 104

4 Determina el m.c.m. de cada conjunto de números.

a. 3, 6 y 9 b. 2, 27, 36 y 45
c. 12, 26, 90 y 54 d. 14, 67, 53, 18 y 107
e. 59, 46, 62, 100 y 165 f. 73, 49, 25 y 18

Comunicación

5 Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la columna de la derecha, según corresponda.

a. m.c.m. (2, 3)	12
b. m.c.m. (8, 6)	22
c. m.c.d. (5, 7)	3
d. m.c.m. (5, 12)	60
e. m.c.m. (2, 11)	24
f. m.c.d. (8, 12, 20)	6
g. m.c.d. (24, 6, 9)	1
h. m.c.d. (12, 48)	4

6 Completa cada descomposición en factores primos, según corresponda.

a.

34	2
▢	▢
1	

$34 = ▢ \times 17$

b.

474	2
▢	3
79	▢
1	

$474 = ▢ \times ▢\, 79$

c.

933	3
▢	311
1	

$933 = ▢ \times 311$

d.

201	3
▢	67
1	

$201 = ▢ \times 67$

7 Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tus respuestas.

a. Los números impares son primos. ( )
b. Hay un número par y primo a la vez. ( )
c. Todo número natural tiene una cantidad infinita de divisores. ( )
d. Es posible contar el número de múltiplos que tiene un número natural. ( )
e. El conjunto de los factores primos de un número es finito ( )

8 Halla tres maneras de factorizar cada una de las siguientes expresiones.

a. 200 b. $6a^3b^3$
c. 50 d. $3p^2r^4s^6$
e. $300q^2$ f. a^2bc^5
g. $450c^3p$ h. $4a^2t^3$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

9 Competa la Tabla 1.

Polinomio	Factor común
$a^3 + a^2 + a$	
$b^4 + b^3 + b^2$	
$x^6 + x^5 + x^3$	
$ab^2 + ab^3 + a^2b^3 + ab^2 + b^2c$	
$ax^2 + 12x^4$	
$4ab^2 - 12ab + 20a^2b^2$	
$3m^2n^3 + 12mn^2 + 9m^3n^3$	
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	
$6m^2 - 3m + 9$	
$12x^2y + 6x^2y^2 + 4x^2$	

Tabla 1

10 Factoriza estas expresiones calculando el factor común.

a. $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 =$ ....

b. $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 =$ ....

c. $2x^3 - 4x^4 + 2x^2 =$ ....

d. $5x^7 - 6x^6 + 3x^5 =$ ....

e. $5xy + 3x^2 - 2xy^2 =$ ....

f. $-15x^2ac^3 + 5xa^2c^2 =$ ....

g. $27a^3b^2c + 9ab^3c^2 =$ ....

h. $ax + x - 2a^2x^3 =$ ....

i. $abc + abc^2 =$ ....

j. $18ax + 9ay + 3a =$ ....

11 Une con una línea las expresiones de la derecha con su factorización por factor común.

a. $3x + 21x^2$	$24x(2m - n)$
b. $2mn - 4m^2n^2$	$3x(1 + 7x)$
c. $6xy - 36x^2$	$7x(9x^2 + m^3)$
d. $48mx - 24nx$	$11n^2m(1 + 4m)$
e. $63x^3 + 7xm^3$	$2mn(1 - 2mn)$
f. $11n^2m + 44n^2m^2$	$7n(2a + 1)$
g. $12m^3n + 36m^2n^3$	$12m^2n(m - 3n^2)$
h. $8a^2 - 12ab$	$5m^2(3m + 4)$
i. $15m^3 + 20m^2$	$6x(y - 6x)$
j. $14an + 7n$	$4a(2a - 3b)$

Razonamiento

12 Encuentra los términos que faltan en la factorización de cada polinomio.

a. $4m^3n - 2mn + 6m = \square(2m^2n - n + \square)$

b. $3x^2y + 6x^2y^2 + 9x^2 = \square(y + \square + \square)$

c. $4a^2 + \square + 20a^2b^2 = 4a(\square + 2b + \square)$

d. $3mn^2 + 5m^2n^2 + 10m^3n^2 = \square(3 + \square + 10m^2)$

e. $\square - 36ab + 6a = 2a(ab^2 - \square + \square)$

f. $14a^2x^2 - 7ax^3 + \square = 7ax^2(\square - \square + 4a)$

g. $4m^2 - 8m + 2 = \square(2m^2 - \square + \square)$

h. $24a^2b^2 - 36ab + \square = 6a(\square - 6b + 1)$

13 Calcula el área de cada figura y escribe la expresión de la adición que se expresa. Luego, factorízala.

a.

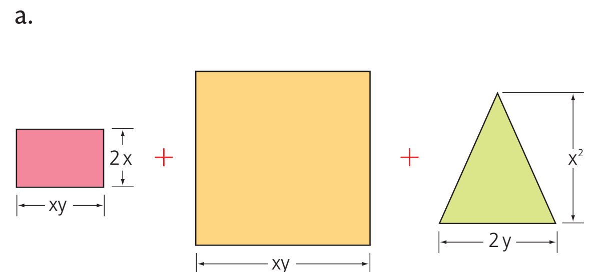


Figura 1

b.

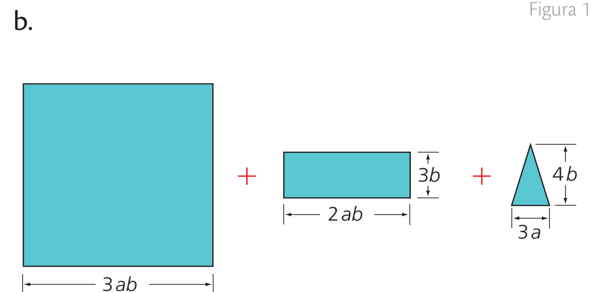


Figura 2

Resolución de problemas



14 Felipe y Estefanía conversan sobre su tarea de matemáticas. Cada uno asegura que el otro ha factorizado mal la expresión $x^3 - 2x^2 + x$. Observa el trabajo de cada uno.

Felipe	Estefanía
$x^3 - 2x^2 + x$	$x^3 - 2x^2 + x$
$= x(x^2 + 2x - 1)$	$= x(x^2 - 2x + 1)$
$= x(x + 2 - 0)$	

Figura 3

¿Quién tiene razón? Explica tu respuesta.

2 Factorización por agrupación de términos

Explora

La Figura 1 muestra el plano de una fábrica automotriz.

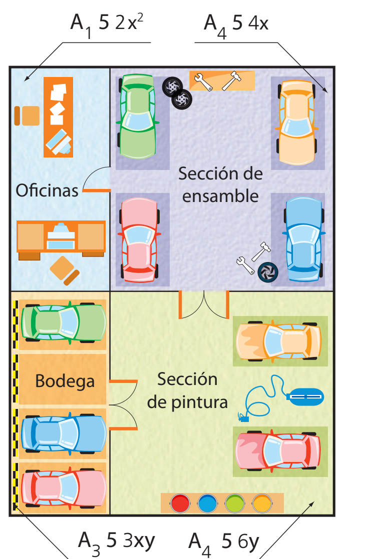


Figura 1

- ¿Cuál es la expresión que representa el área de la fábrica?

El área total A de la fábrica está dada por la adición de las áreas de las zonas que la conforman. Es decir:

$$A = 2x^2 + 4x + 3xy + 6y$$

Las dimensiones del terreno se obtienen factorizando la anterior expresión.

Como no existe un factor común a los términos del polinomio, se usa la **factorización por agrupación de términos.**

Entonces, para factorizar la expresión $2x^2 + 4x + 3xy + 6y$ con este método:

1. Se agrupan términos que tengan algún factor común.

$$(2x^2 + 4x) + (3xy + 6y)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$2x(x + 2) + 3y(x + 2)$$

3. Se factoriza la nueva expresión común, en este caso $(x + 2)$.

$$(x + 2)(2x + 3y)$$

Por lo tanto,

$$2x^2 + 4x + 3xy + 6y = (x + 2)(2x + 3y)$$

Dimensiones del terreno

Para **factorizar un polinomio por agrupación de términos,** se aplica la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. De esta manera, se hallan factores comunes a cada grupo de términos.

Ejemplo 1

Para factorizar el polinomio $5x + 5y + 3x^2 + 3xy$ se siguen estos pasos:

1. Se agrupan los términos que tienen algún factor común.

$$(5x + 5y) + (3x^2 + 3xy)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$5(x + y) + 3x(x + y)$$

3. Se factoriza la expresión común, es decir $(x + y)$.

$$(x + y)(5 + 3x)$$

Por lo tanto,

$$5x + 5y + 3x^2 + 3xy = (x + y)(5 + 3x)$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Factoriza el polinomio $4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$.

Solución:

La factorización requiere los siguientes pasos.

$4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$

$(4x^2 - 2xy) + (9yz - 18xz)$ ← Se agrupan los términos con factores comunes.

$2x(2x - y) + 9z(y - 2x)$ ← Se factoriza cada grupo de términos.

$2x(2x - y) - 9z(2x - y)$ ← Se reemplaza $(y - 2x)$ por $(2x - y)$.

$(2x - y)(2x - 9z)$ ← Se factoriza la expresión común $(2x - y)$.

Ten en cuenta

La expresión opuesta a $a - b$ es $b - a$, porque:

$$-(a - b) = (-a + b) = (b - a)$$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe la factorización de cada polinomio.

a. $ac - ad + bc - bd$

b. $3ax - ay + 9bx - 3by$

c. $18mx - 6my + 54nx - 18ny$

d. $4ax + ay + 12x^2 + 3xy$

e. $3xy - 3xz + 3x - y + z - 1$

f. $2ab - 2ac + 2a - b + c - 1$

g. $2ax + 5bx + 2ay + 5by$

h. $5xp + 5py - 3ax - 3ay$

3 Une con una línea cada polinomio con su factorización.

a. $xy - 4x + y - 4$	$(a + 1)(x - 2y)$
b. $a(n + 2) + (n + 2)$	$(x + 1)(y - 4)$
c. $-5x(a + c) + 2y(a + c)$	$(2 - 3z)(3x - 2y)$
d. $6x - 4y + 6yz - 9xz$	$(n + 2)(a + 1)$
e. $x(a + 1) - 2y(a + 1)$	$(a + c)(2y - 5x)$

Razonamiento

4 Factoriza el área de cada rectángulo y encuentra los polinomios que representan la medida de sus lados.

a.

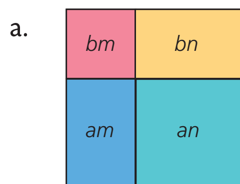


Figura 2

b.

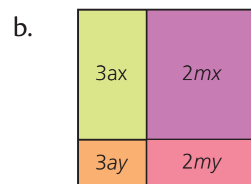


Figura 3

c.

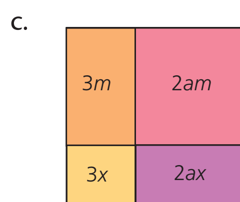


Figura 4

d.

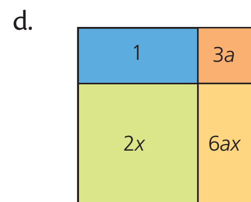


Figura 5

e.

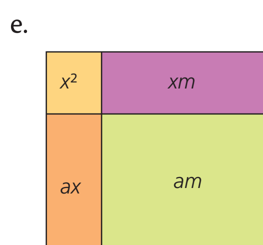


Figura 6

f.

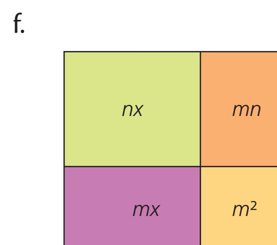


Figura 7

5 Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tus respuestas.

a. Un polinomio se puede factorizar por agrupación solo si tiene 2, 4, 6 o más términos pares. ( )

b. El opuesto de $(m - 5)$ es $(-m + 5)$. ( )

c. Todo polinomio se puede factorizar por agrupación de términos. ( )

d. Los grupos $(x + 3)$ y $(3 + x)$ son iguales y, por lo tanto, pueden ser un término común. ( )

e. El opuesto de $(3m^2n - 6n + 3)$ es $(-6n + 3 + 3m^2n)$. ( )

Comunicación

6 Completa los pasos para la factorización de cada polinomio por agrupación de términos.

a. $p^2 + pq + ps + qs$

$= (\square + \square) \square (ps + qs)$

$= \square(p + q) + s(\square + \square)$

$= (\square + \square)(p + q)$

b. $h2 - hq + hs - qs$

$= (\square - \square) \square (hs - qs)$

$= h(\square - \square) + \square(h - q)$

$= (h \square s)(h \square q)$

c. $2x^2 + 3xy - 4x - 6y$

$= (2x^2 - \square) \square (\square - 6y)$

$= \square(\square - 2) + \square(\square - 2)$

$= (\square + 3y)(\square - \square)$

d. $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

$= (\square + 3x^2) + (2x \square 6)$

$= \square(\square + 3) + 2(\square + 3)$

$= (\square + 3)(\square + 2)$

Resolución de problemas

7 Para construir una estructura de cartón se requieren cuatro piezas de diferente área.

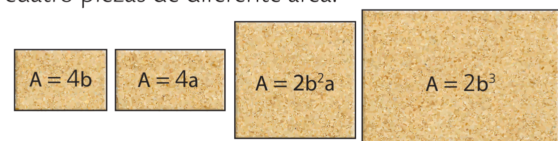


Figura 8

¿Cuál es la expresión factorizada que corresponde a la sumatoria de todas las áreas?

3 Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos

Explora

La figura 1 corresponde al plano de una finca destinada al cultivo. Allí se ha asignado un sector para la construcción de una casa cuya área equivale a la expresión y^2.

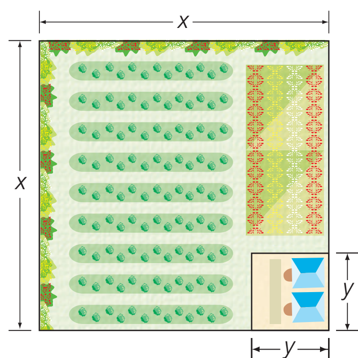


Figura 1

- ¿Cómo se puede expresar el área de la finca que se destina para cultivo?

El área que se usa para cultivo se calcula mediante la expresión $x^2 - y^2$. En este caso, los términos x^2 y y^2 son cuadrados perfectos.

A partir de un procedimiento gráfico se puede obtener una expresión equivalente a la expresión $x^2 - y^2$. Observa:

1. El área que se quiere calcular está determinada por el área total de la finca (x^2) menos el área que ocupa la casa (y^2). Graficamente, corresponde a eliminar el cuadrado de lado y, de la superficie del cuadrado de lado x. (Figura 2)

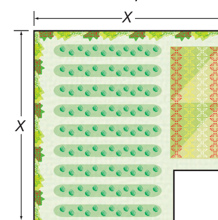


Figura 2

2. Se puede trazar una línea imaginaria para determinar dos rectángulos de las siguientes dimensiones:
Rectángulo 1: $(x - y)$ y x
Rectángulo 2: $(x - y)$ y y
(Figura 3)

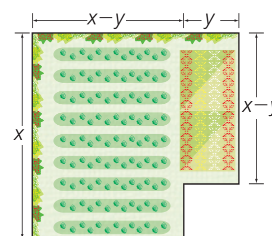


Figura 3

3. Se traslada el rectángulo 2 de tal forma que coincida con el rectángulo 1 por el lado de longitud $(x - y)$. Se obtiene así un rectángulo de dimensiones $(x - y)$ y $(x + y)$.
(Figura 4)

Por lo tanto, las expresiones $x^2 - y^2$ y $(x - y)(x + y)$ son equivalentes.

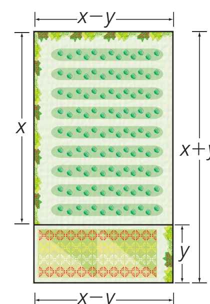


Figura 4

Factorizar una **diferencia de cuadrados** equivale al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos. Es decir: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt05

Observa un video relacionado con la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

Ejemplo 1

La diferencia de cuadrados $x^2 - 36$ es equivalente al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de x^2 y 36. Así:

$$x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $a^2 - 4$ **b.** $m^2 - 25$ **c.** $4x^2 - 9$ **d.** $49n^2 - 1$

Solución:

a. $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$, porque $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{4} = 2$.

b. $m^2 - 25 = (m + 5)(m - 5)$, porque $\sqrt{m^2} = m$ y $\sqrt{25} = 5$.

c. $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$, porque $\sqrt{4x^2} = 4x$ y $\sqrt{9} = 3$.

d. $49n^2 - 1 = (7n + 1)(7n - 1)$, porque $\sqrt{49n^2} = 7n$ y $\sqrt{1} = 1$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Extrae la raíz cuadrada de cada término.

a. $9a^2$
b. $4x^2y^2z^4$
c. $225p^4$
d. $49a^4y^6z^8$
e. $144a^2m^6n^4$
f. $121x^{10}$
g. $100m^2$
h. $81a^2b^4$

3 Completa los términos de la factorización de cada expresión algebraica.

a. $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$
b. $a^2 - 144 = (a + \square)(a - \square)$
c. $n^2 - 49 = (n + \square)(n - \square)$
d. $4a^2 - 100 = (2a + \square)(2a - \square)$
e. $9x^2 - 16 = (3x + \square)(3x - \square)$
f. $4m^2 - 81 = (2m + \square)(2m - \square)$

4 Factoriza la diferencia de cuadrados.

a. $16x^2 - 9y^2 =$ ....
b. $144a^2 - 100b^2 =$ ....
c. $400n^2 - 169m^2 =$ ....
d. $144 - 9a^2 =$ ....
e. $121 - x^4 =$ ....
f. $4a^2b^4 - 121 =$ ....
g. $25a^{12} - 100a^4b^{10} =$ ....
h. $9a^2 - 4x^2y^2z^4 =$ ....
i. $225p^4 - 49a^4y^6z^8 =$ ....
j. $144a^2m^6n^4 - 121x^{10} =$ ....
k. $100m^2 - 81a^2b^4 =$ ....
l. $144a^2m^6n^4 - 4x^2y^2z^4 =$ ....
m. $9a^2 - 100m^2 =$ ....

5 Relaciona cada factorización con la diferencia de cuadrados que le corresponde.

a. $(7x + 6)(7x - 6)$	$121x^2 - 169$	☐
b. $(2x + 10)(2x - 10)$	$m^2 - 36$	☐
c. $(6x + 4)(6x - 4)$	$49x^2 - 36$	☐
d. $(11x + 13)(11x - 13)$	$4x^2 - 100$	☐
e. $(m + 6)(m - 6)$	$36x^2 - 16$	☐
f. $(8m + 6)(8m - 6)$	$64m^2 - 36$	☐

6 Halla la expresión equivalente a cada producto.

a. $(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$ ....
b. $(2a^4 + 10)(2a^4 - 10) =$ ....
c. $(6jk^2 + 4)(6jk^2 - 4) =$ ....
d. $(t^2 + 1)(t^2 - 1) =$ ....
e. $(1 + 12h^3)(1 - 12h^3) =$ ....
f. $(xq^3 + yz^3)(xq^3 - yz^3) =$ ....
g. $(i^2 + t^2j^2)(i^2 - t^2j^2) =$ ....
h. $(5 + z^2)(5 - z^2) =$ ....
i. $(11b^2 + s)(11b^2 - s) =$ ....

7 Contesta la pregunta, con base en la información dada.

Dos estudiantes presentaron las siguientes pruebas.

Mariana	Luis
$-x^2 - 36 =$	$-x^2 - 36 =$
$-(x - 6)(x + 6)$	No se puede factorizar.

¿Quién aprobó el examen? Explica tu respuesta.

8 Escribe el signo $=$ o $\neq$ según corresponda.

a. $36m^4n^2 - 81p^8$ ☐ $(6m^2n - 9p^4)(6m^2n + 9p^4)$
b. $121x^2 - 100$ ☐ $(11x - 10)(11x + 10)$
c. $49z^2 - 400j^6$ ☐ $(7z - 20j^3)(7z + 20j^3)$
d. $q^2 - r^2$ ☐ $(2q - r)(2q + r)$
e. $a^4b^2 - 16$ ☐ $(a^2b - 4)(a^2b - 4)$

Resolución de problemas



9 Un centro vacacional diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar como $x^2 - 144$, ¿cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?



Figura 5

4 Factorización de cubos perfectos. Suma y diferencia

Explora

El volumen de un cubo de lado a está dado por el producto entre su largo, su ancho y su alto, así:

$a \times a \times a = a^3$

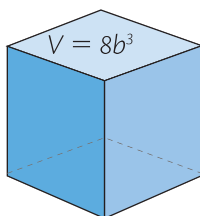


Figura 1

- ¿Cuál es la longitud del lado del cubo de la figura 1, si se sabe que su volumen es $8b^3$?

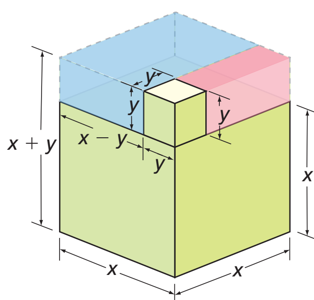


Figura 2

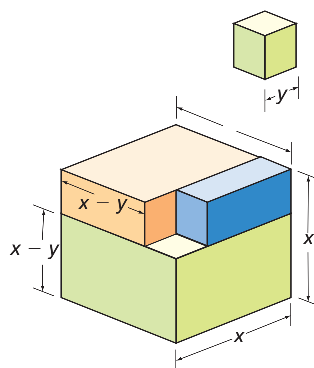


Figura 3

Para calcular la longitud del lado del cubo cuyo volumen es $8b^3$, se extrae la raíz cúbica de este valor. Es decir:

$$\sqrt[3]{8b^3} = 2b$$

El cálculo de raíces cúbicas será de gran ayuda en la factorización de cubos perfectos.

4.1 Factorización de la suma de cubos perfectos

La suma de dos cubos perfectos equivale al producto de dos factores: el primero, un binomio formado por las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz menos el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

La **factorización de la suma de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Esta igualdad se obtiene al completar la figura en el espacio, de tal manera que las dimensiones del paralelepípedo que se forma son $x + y$, x y x, como en la figura 2

Ejemplo 1

Para factorizar la suma $x^3 + 27$ se sigue este proceso:

1. Se extrae la raíz cúbica del primer término. — *Para* x^3 es $\sqrt[3]{x^3} = x$
2. Se extrae la raíz cúbica del segundo término. — Para 27 es $\sqrt[3]{27} = 3$
3. Se expresa la suma de cubos como el producto de la suma de las raíces por la suma de los cuadrados de las raíces menos su producto. — $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

4.2 Factorización de la diferencia de cubos perfectos

La diferencia de dos cubos perfectos equivale a multiplicar dos factores: el primero, un binomio formado por la diferencia de las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz más el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

La **factorización de la diferencia de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Un ejemplo gráfico de esta igualdad es la figura 3. Se obtiene al completar la figura en el espacio y calcular los volúmenes de cada una de las piezas resultantes.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Factoriza el binomio $x^3 - 8$.

Solución:

Factoriza la expresión $x^3 - 8$. Para ello, primero calcula la raíz cúbica de x^3 que es x y luego, la raíz cúbica de 8 que es 2.

Después, expresa $x^3 - 8$ como el producto de la diferencia de las raíces $(x - 2)$ y la suma de los cuadrados de las raíces más el producto de las mismas, es decir, $(x^2 + 2x + 4)$.

Entonces: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Extrae la raíz cúbica de cada término.

a. x^3y^6 b. 64
c. $64c^3$ d. $125a^6$
e. $8m^9$ f. $343a^3b^6$
g. 1 000 h. $a^6b^{12}c^3$

3 Encuentra la expresión factorizada de cada expresión.

a. $x^3 + 216$ b. $a^3 + 8$
c. $n^3 + 512$ d. $y^3 + 343$
e. $m^3 + 1000$ f. $z^3 + 729$
g. $x^3 - 64y^6$ h. $1 - 125a^9y^9$
i. $1728x^6 - 343x^3y^6z^{12}$ j. $8x^{18} - 729y^3z\,15$
k. $27a^{21} - 1000b^3c^{12}$ l. $64m^9 - 216$
m. $(9y^2)^3 - (4z)^3$ n. $n^3 - 343x^3$

4 Factoriza la suma o diferencia de cubos y, luego, factoriza la expresión completa.

a. $(x + 2) + (x^3 + 8) =$ ....
b. $(x - 4) + (x^3 - 64) =$ ....
c. $(a + 5) + (a^3 + 125) =$ ....
d. $(2b + 1) + (8b^3 + 1) =$ ....
e. $(m + 1) + (m^3 + 1) =$ ....
f. $(3x + 2) + (27x^3 + 8) =$ ....

Razonamiento

5 Expresa cada producto como una diferencia de cubos.

a. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$
b. $(8nm + 5p)(64n^2m^2 + 40nmp + 25p^2)$
c. $(7a - b)(49a^2 + 7ab + b^2)$
d. $(6t^2 - 1)(36t^4 + 6t^2 + 1)$

6 Expresa cada producto como una suma de cubos.

a. $(7 + 4y)(49 - 28y + 16y^2)$
b. $(5z + 3)(25z^2 - 15z + 9)$
c. $(12 + a)(144 - 12a + a^2)$
d. $(8c + b)(64c^2 - 8cb + b^2)$

7 Indica para cuáles binomios $2 - x$ es un factor.

a. $8 - x^3$ b. $125 + x^3$
c. $x^3 - 64$ d. $162 - 2x^3$

8 Indica para cuáles binomios $x + 3$ es un factor.

a. $x^2 + 9$ b. $x^4 - 81$
c. $x^3 - 27$ d. $x^5 + 243$

Comunicación

9 Completa los recuadros para que las siguientes igualdades sean ciertas.

a. $8x^3 + 27$
$= (\square + 3)(\square - 6x + \square)$
b. $c^{15} - 216a^6$
$= (\square - \square)(c^{10} + \square + 36a^4)$
c. $64g^{12}\ 2\ b^6$
$= (\square - \square)(16g^8 + \square + b^4)$
d. $8x^3 - 27 = (\square - 3)(\square + 6x + \square)$
e. $c^{15} + 216a^6$
$= (\square + \square)(c^{10} - \square + 36a^4)$

10 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (V). Justifica tus respuestas.

a. $512b^{18} + 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$
b. $512b^{18} - 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$
c. $216 + y^6 = (6 + y^2)(36y - 6y^2 + y^4)$
d. $216 - y^6 = (6 - y^2)(36 + 6y^2 + y^4)$

Resolución de problemas

11 ¿Cuál es la expresión que representa el volumen de la figura 4? ¿Cuál es la factorización de esta expresión?

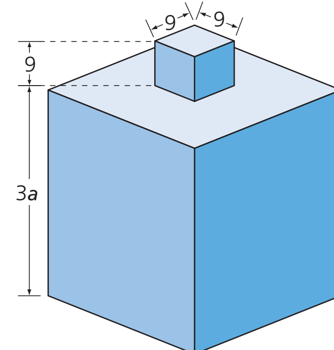


Figura 4

Volumen: $\square$

Expresión factorizada: $\square$

5 Factorización de expresiones de la forma $x^n \pm y^n$

Explora

Fernanda considera que la expresión $x^5 + 32y^5$ no se puede factorizar. Miguel afirma que está equivocada.

- ¿Quién tiene la razón?

El binomio $x^5 + 32y^5$ es de la forma $x^n + y^n$ con $n = 5$; es decir que n es un número impar. Teniendo en cuenta estas características, se puede verificar si $x^5 + 32y^5$ es divisible entre $x + 2y$ (valor que se obtiene al calcular la raíz quinta de cada término).

Luego, la división se expresa como $\dfrac{x^5 + 32y^5}{x + 2y}$ se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4y + 0x^3y^2 + 0x^2y^3 + 0xy^4 + 32y^5 & x + 2y \\ \hline -x^5 - 2x^4y & x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&2x^4y + 0x^3y^2 \\
&-2x^4y - 4x^3y^2 \\
&-4x^3y^2 + 0x^2y^3 \\
&4x^3y^2 - 8x^2y^3 \\
&-8x^2y^3 + 0xy^4 \\
&8x^2y^3 + 16xy^4 \\
&16xy^4 + 32y^5 \\
&-16xy^4 - 32y^5 \\
&0
\end{aligned}$$

Ten en cuenta

Para empezar una división se deben escribir el dividendo y el divisor en orden decreciente, y si falta algún término, se deja el espacio.

Al finalizar la división, se puede afirmar que el binomio es factorizable y que Miguel tiene la razón, porque $x^5 + 32y^5 = (x + 2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$.

Las **expresiones de la forma $x^n + y^n$**, con n como un número entero, son factorizables solo si n es impar. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Las **expresiones de la forma $x^n - y^n$**, con n como un número entero, son factorizables para todo n. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Al observar las expresiones generales de la factorización de los binomios de las formas $x^n + y^n$ o $x^n - y^n$, se concluye que:

- El primer factor tiene el mismo signo del binomio que se quiere factorizar.
- Cuando la operación es una adición, los signos del segundo factor se alternan entre positivo y negativo, empezando por positivo. Si es una sustracción, todos los signos del segundo factor son positivos.
- En el segundo factor, los exponentes del primer término van disminuyendo, mientras que los del segundo término van aumentando.

Ten en cuenta

La diferencia de cuadrados, la diferencia de cubos y la suma de cubos son casos especiales de las expresiones de la forma $x^n \pm y^n$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Factoriza el binomio $x^4 - y^4$.

Solución:

El binomio $x^4 - y^4$ es la diferencia de dos potencias de un número par. Entonces, es factorizable; $(x - y)$ y $(x + y)$ son dos de sus factores.

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^{(4-1)} + x^{(4-2)}y^{(4-3)} + x^{(4-3)}y^{(4-2)} + y^{(4-1)}) \\ &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \end{aligned}$$

El segundo factor se factoriza por agrupación de términos:

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = (x - y)(x^2(x + y) + y^2(x + y)) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Factoriza las expresiones dadas.

a. $x^8 - y^4$
b. $x^7 + 128$
c. $a^3 - b^3$
d. $m^5 - n^5$
e. $o^6 + 64q^6$
f. $32 - a^5$
g. $343c^3 - 27z^3$
h. $64 + m^3$
i. $o^6 - 64q^6$
j. $a^2 - b^2$
k. $1 - z^3$
l. $8t^3 + 64$
m. $x^{10} - 1$
n. $x^{15} + y^{15}$
ñ. $16x^4 + 81y^4$
o. $3\,125 - a^5$

3 Encuentra la expresión factorizada para cada suma o diferencia de cubos.

a. $8x^3 + 1 =$ ....
b. $27 - 8a^3 =$ ....
c. $27x^3 + 8 =$ ....
d. $64a^3 - 27b^3 =$ ....
e. $125n^3 + 64 =$ ....
f. $216a^3b^3 + 1\,000 =$ ....
g. $x^6 - y^6 =$ ....
h. $125a^6 + 512b^6 =$ ....
j. $x^9 + 8y^9 =$ ....
k. $x^9 + 8y^9 =$ ....

4 Factoriza cada uno de los binomios y luego, factoriza la expresión completa.

a. $(x + 1) + (x^7 + 1)$
b. $(x - 3) + (x^5 - 243)$
c. $(x + 2) + (x^5 + 32)$
d. $(x - 3y) + (x^6 - 729y^6)$

5 Determina cuáles de los siguientes polinomios son factorizables. Indica para cuáles $(2x - y)$ es un factor y para cuáles $(2x + y)$ es un factor.

a. $64x^6 - y^6$
b. $64x^6 + y^6$
c. $128x^7 - y^7$
d. $128x^7 + y^7$
e. $8x^5 + y^5$
f. $(2x)^{125} + y^{125}$
g. $(2x)^{125} - y^{125}$
h. $(2x)^{1234} - y^{1234}$

Comunicación

6 En la tabla 1 marca Sí o No, según sea el caso. Justifica cada una de tus elecciones.

¿Las expresiones son equivalentes?	Sí	No
a. $m^7 + 2\,187 = 2\,187 + m^7$		
b. $m^6 + 729 = 3^6 + m^6$		
c. $16c^4 - 81x^4 = (3x)^4 - (2c)^4$		
d. $16c^4 - 81x^4 = (2c)^4 - (3x)^4$		
e. $m^6 - 729 = 3^6 - m^6$		

Tabla 1

7 Indica si los polinomios son factorizables o no y explica tus respuestas.

a. $m^7 + 2\,187$
b. $m^6 + 729$
c. $16c^4 + 81x^4$
d. $16c^4 - 81x^4$
e. $m^6 - 729$
f. $m^7 - 2\,187$

8 Analiza y escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. La suma de potencias con exponente par siempre es factorizable. ( )
b. La diferencia de potencias con exponente impar solo es factorizable cuando los exponentes son múltiplos de 3. ( )
c. La suma de potencias con exponente par no es factorizable. ( )
d. La diferencia de potencias con cualquier exponente es factorizable. ( )
e. En la diferencia de potencias con el mismo exponente se alternan los signos del segundo factor, empezando por el positivo. ( )
f. En el segundo factor, los exponentes del primer término aumentan y los exponentes del segundo término disminuyen. ( )

Resolución de problemas



9 Julián realizó su tarea de matemáticas, pero no está seguro de los procedimientos y estrategias de factorización que utilizó. Analiza y corrige la factorización de cada polinomio si es necesario.

Julián Rodríguez Grado: noveno

a. $144 - b^2 = 12^2 - b^2 = (12 - b)^2$
b. $216 + n^3 = (6 + n)(36 + 6n + n^2)$

6 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Explora



Figura 1

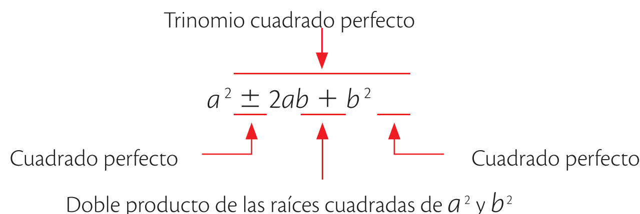
El área de la pintura de Van Gogh está determinada por la expresión:

$$x^2 - 16x + 64$$

- ¿Cuál es la longitud de los lados de la pintura si se sabe que es cuadrada?

Para determinar los lados de la pintura se factoriza la expresión del área.

Identificamos que en este polinomio hay tres términos. El primero y el último son cuadrados perfectos y el valor central equivale al doble del producto de las raíces cuadradas del primero y tercer término; por eso se llama **trinomio cuadrado perfecto**.



Un **trinomio cuadrado perfecto** se factoriza como un binomio al cuadrado, así:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \qquad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Al factorizar la expresión del área de la pintura se obtiene que:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$$

Por lo tanto, la medida de los lados de la pintura de la Figura 1 es $(x - 8)$.

Ejemplo 1

Para calcular la longitud de los lados de un cuadrado cuya área es $a^2 + 14a + 49$:

1. Se hallan las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos a^2 y 49. Esas raíces son a y 7, respectivamente. $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{49} = 7$
2. Se verifica que el doble producto de esas raíces es $14a$, que corresponde al segundo término del polinomio. $2(a \cdot 7) = 14a$
3. Se factoriza la expresión y se obtiene como resultado $(a + 7)^2$. $a^2 + 14a + 7 = (a^2 + 7)^2$

Por lo tanto, la longitud de cada lado del cuadrado es $(a + 7)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina cuáles de estos trinomios son cuadrados perfectos y factorízalos.

a. $4a^2 + 12ab + 9b^2$ b. $3a^2 + 30ab + 5b^2$

c. $36a^2 - 60ab + 25b^2$ d. $100a^2 + 90ab + 81b^2$

Solución:

a. Es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $2a$ y $3b$ y su doble producto es $2(2a)(3b) = 12ab$; es decir, es igual al segundo término. Luego, $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

b. No es un cuadrado perfecto, ya que el primer y el tercer término no son cuadrados perfectos.

c. Es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $6a$ y $5b$ y su doble producto es $2(6a)(5b) = 60ab$; es decir, es igual al segundo término. Luego, $36a^2 - 60ab + 25b^2 = (6a - 5b)^2$.

d. No es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $10a$ y $9b$, pero su doble producto es $2(10a)(9b) = 180ab$ y este no corresponde con el segundo término del trinomio.

CULTURA del Buen Vivir

La confianza

Una manera de ganar confianza en nuestras habilidades personales es enfrentarse a diferentes retos y poniendo en práctica las soluciones obtenidas.

- ¿De qué manera consideras que puedes ganar confianza en la resolución de actividades matemáticas?

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Expresa cada trinomio como un binomio al cuadrado.

a. $x^4 + 6x^2 + 9 =$ ....

b. $x^6 - 4x^3 + 4 =$ ....

c. $y^8 - 2y^4z^3 + a^6 =$ ....

d. $a^{10} + 8a^5 + 16 =$ ....

e. $9a^2 - 12ab + 4b^2 =$ ....

f. $y^4 - 6y^2z + 9z^2 =$ ....

g. $16x^2 + 40xy^2 + 25y^4 =$ ....

Razonamiento

3 ¿Cuál es el polinomio que expresa el área de cada figura del 2 al 5? Factorízalo.

a.

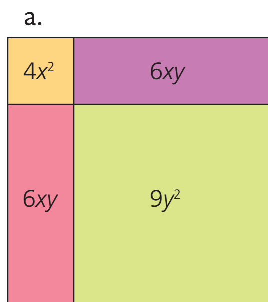


Figura 2

b.

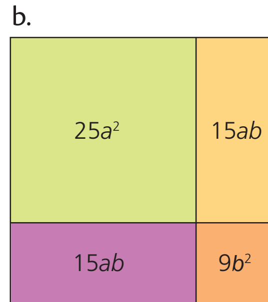


Figura 3

c.

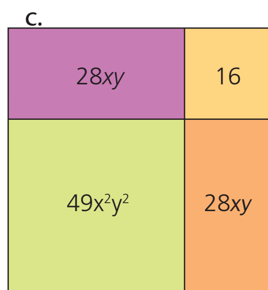


Figura 4

d.

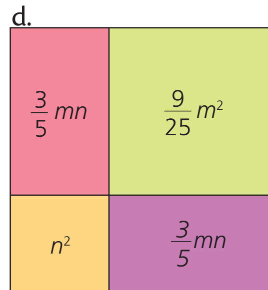


Figura 5

4 Escribe el término que falta para que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto

a. $a^2 + 2(a)(3) + \square^2$

b. $\square^2 + 2(b)(6) + \square^2$

c. $\square^2 + 2(a)(5) + \square^2$

d. $m^2 + 2(m)(7) + \square^2$

e. $x^2 + 2(x)(11) + \square^2$

f. $c^2 + 2(c)(10) + \square^2$

g. $x^2 + 2(x)(4) + \square^2$

h. $n^2 - 2(n)(6) + \square^2$

i. $\square^2 - 2(y)(g) + \square^2$

j. $n^2 + 2(n)(9) + \square^2$

5 Factoriza cada trinomio como el producto del factor común y un trinomio cuadrado. Después, factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado.

a. $6x^3 + 12x^2 + 6x$

b. $16x^5 - 48x^3 + 36x$

c. $3x^5 - 24x^4 + 48x^3$

d. $4x^3 + 40x^2 + 100x$

e. $7x^4 - 42x^3 + 63x^2$

Resolución de problemas



6 La Figura 6 es un cuadrado dividido en cuatro partes: un cuadrado grande, un cuadrado pequeño y dos rectángulos iguales. Con base en esta información y la que ofrece la figura 6, calcula lo que se indica.

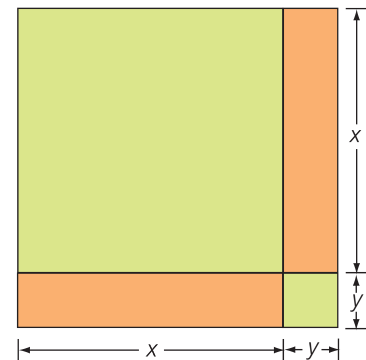


Figura 6

a. La medida de un lado de la figura.

b. El área de cada una de las partes:
- Cuadrado grande
- Cuadrado pequeño
- Rectángulo

c. El área total de la figura.

d. De las siguientes seis expresiones, hay dos que corresponden al área de la figura. Encuéntralas y subráyalas.

$x^2 + y^2$	$(xy)^2$
$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$2x + 2y$	$x^2 - y^2$

e. Explica por qué se puede asegurar que la siguiente igualdad es correcta:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

f. Encuentra la expresión que representa el área del rectángulo cuando $y = 7$.

g. Determina el valor que toma x, si el área total de la figura es:

$$A = 256 + 32y + y^2$$

7 Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción

Explora

El área de una puerta rectangular se expresa con el siguiente polinomio:

$x^4 + x^2 + 1$

- ¿Cuál es la factorización del polinomio que expresa la medida de la superficie de la puerta?

En el trinomio $x^4 + x^2 + 1$, el primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es $2x^2$, por lo que el trinomio no es cuadrado perfecto.

Para factorizar este polinomio, se puede seguir un proceso particular, tal como se presenta a continuación:

1. Se adiciona y se sustrae x^2, es decir, se adiciona 0, pero escrito de la forma $(x^2 - x^2)$.

$x^4 + x^2 + 1 =$
$(x^4 + x^2 + 1) + (\mathbf{x^2 - x^2})$

2. Se aplica la propiedad asociativa de la adición y se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, que se ubica en el paréntesis.

$x^4 + x^2 + 1 =$
$(x^4 + x^2 + 1 \mathbf{+ x^2}) - x^2 =$
$(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

3. Se expresa el trinomio cuadrado perfecto como un binomio al cuadrado.

$x^4 + x^2 + 1 =$
$(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 =$
$(x^2 + 1)^2 - x^2$

4. Se factoriza esta diferencia de cuadrados y se ordenan los términos de cada factor.

$x^4 + x^2 + 1 =$
$(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) =$
$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Ten en cuenta

Un trinomio cuadrado perfecto es de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$ y se puede expresar como $(a \pm b)^2$.

Una diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y se puede factorizar como $(a + b)(a - b)$.

Los **trinomios de la forma** $\boldsymbol{a^2 \pm mab + b^2}$, con m distinto de 2, satisfacen parcialmente las características de los trinomios cuadrados perfectos. El primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar esos trinomios, se adiciona y se sustrae al trinomio dado un término de la forma nab, de manera que $mab + nab = \pm 2ab$. Si el trinomio original es factorizable, se obtiene la diferencia entre un trinomio cuadrado perfecto y un cuadrado perfecto, lo que finalmente es factorizado como diferencia de cuadrados.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina por qué cada trinomio no es un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$

b. $x^4 - 6x^2 + 1$

c. $x^6 - 4x^3 + 2$

d. $25x^4 + 54x^2y^2 + 49b^4$

Solución:

a. x^4 y y^4 son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2x^2y^2$, y no corresponde al segundo término del trinomio.

b. x^4 y 1 son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2x^2$, y no corresponde al segundo término del trinomio.

c. x^6 es el único término del trinomio que es un cuadrado perfecto.

d. Los términos $25x^4$ y $49b^4$ son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2(5x^2)(7b^2) = 70x^2b^2$ y esta expresión es diferente al segundo término del trinomio.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el doble producto de las raíces de las siguientes parejas de cuadrados perfectos.

a. x^8, 4 b. $4a^4$, 25 c. m^4, $25n^4$

d. $9x^4$, 1 e. x^8, y^8 f. $121c^4$, 81

3 Escribe el término que completa cada igualdad.

a. $54x^2y^2 + \square = 90x^2y^2$

b. $16b^3y^2 + \square = 220b^3y^2$

c. $21x^4y^6 + \square = 228x^4y^6$

d. $15a^2c^4 + \square = 30a^2c^4$

e. $18b^3g^4 + \square = -3b^3g^4$

f. $50h^6k^4 + \square = -43h^6k^5$

4 Determina la expresión que se debe adicionar al polinomio para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$

b. $p^4 - 6p^2 + 1$

c. $25x^4 + 54x^2y^2 + 49y^4$

d. $9x^4 - 15x^2 + 1$

e. $36x^8 + 50x^4y^2 + 121y^4$

f. $169b^4 + 200b^2 + 144$

5 Factoriza cada trinomio de la forma $a^2 + mab + b^2$ con m diferente de 2, por adición o sustracción.

a. $25a^2 + 54ab + 49b^2$

b. $121x^6 - 108x^3 + 4$

c. $64x^2 - 169xy + 81y^2$

d. $x^4 - 9x^2 + 16$

e. $x^8 - 3x^4 + 4$

f. $4x^4 - 29x^2 + 25$

g. $x^4 - 19x^2y^2 + 25y^4$

Razonamiento

6 Completa la tabla 1.

$a^2 \pm mab + b^2$	a	b	$2ab$	$\pm mab$
$x^8 + 3x^4 + 4$				
$y^4 + 2y^2 + 9$				
	x^8	25		$46x^8$
	$11x^2$	$6y^4$		$-133x^2y^4$
	$7x^2$		$112x^2$	$76x^2$

Tabla 1

Comunicación

7 Escribe si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El doble producto de r^4 y t^5 es r^4t^5. ( )

b. El doble producto de las raíces m^3 y $2g^6$ es $4m^3g^3$. ( )

c. Al duplicar el producto entre h^2 y $5b^5$, se obtiene $10h^2b^5$. ( )

d. Las raíces cuadradas de $9m^6$ y $144c^{12}$ son $3m^6$ y $12c^{12}$, respectivamente. ( )

e. El doble producto de las raíces y^3 y nm^2 es $2y^3nm^2$. ( )

Resolución de problemas



8 Luis debe factorizar los polinomios. Ayúdale a lograrlo.

a.

$m^8 + 3m^4 + 4 = m^8 + 3m^4 + 4 \square$

$m^8 + 3m^4 + 4 = (\square + 3m^4 + \square + m^4) - m^4$

$m^8 + 3m^4 + 4 = (m^8 + \square + 4) \square m^4$

$m^8 + 3m^4 + 4 = \square^2 - \square^2$

$m^8 + 3m^4 + 4 = \square\,(m^4 + 2 - m^2)$

b.

$4 + 6b + b^2 = 4 + 6b + b^2 \square$

$4 + 6b + b^2 = (4 + \square + b^2 - \square) \square 2b$

$4 + 6b + b^2 = ((4 + 4b\ 1 \square) + \square$

$4 + 6b + b^2 = \square^2 + 2b$

c.

$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 + (\square - 5k^2h^4)$

$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$(25k^4 - \square + h^8 - \square) + 5k^2h^4$

$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$(25k^4 - \square + h^8) + 5k^2h^4$

$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 = (5k^2 - h^4)^2 + \square$

d.

$d^{12} + 5d^6 + 1 = d^{12} + \square + 1 \square (3d^6 - \square)$

$d^{12} + 5d^6 + 1 = (d^{12} + 5d^6 + 1 \square 3d^6) + \square$

$d^{12} + 5d^6 + 1 = (d^{12} + \square + 1) + \square$

$d^{12} + 5d^6 + 1 = (\square)^2 + 2d^6$

8 Factorización de trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Explora

La altura que alcanza un balón al ser lanzado se expresa como $x^2 - 7x + 10$.



Luis Hernández

- ¿Cuál es la expresión factorizada que corresponde a la altura del balón en el tiempo x?

Para expresar la altura del balón en forma factorizada, se buscan dos números p y q, tales que $p + q = -7$ y $p \cdot q = 10$.

Se determina el conjunto de factores de 10. Son: 1, 2, 5, 10, -1, -2, -5 y -10.

Se eligen aquellos factores que cumplan las condiciones dadas. Los dos números son -2 y -5, porque $-2 + (-5) = -7$ y $-2 \cdot -5 = 10$.

Luego, la expresión factorizada de $x^2 - 7x + 10$ es $(x - 2)(x - 5)$.

Un **trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$**, con n como un número entero, es factorizable si existen dos números p y q que cumplen las condiciones $p + q = b$ y $pq = c$. En este caso, el trinomio se expresa como el producto de dos binomios con primer término x^n y como segundos términos los números p y q. Es decir: $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + p)(x^n + q)$

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla p y q para que satisfagan las condiciones dadas:

a. $pq = 12$ y $p + q = 8$ **b.** $pq = -18$ y $p + q = 3$

Solución:

a. Se determinan las parejas de factores de 12 y se halla la suma de cada una.

Factores		Suma
p	q	$p + q$
1	12	13
2	**6**	**8**
3	4	7
-1	-12	-13
-2	-6	-8
-3	-4	-7

Tabla 1

Los números que satisfacen la condición son 2 y 6.

b. Se hallan las parejas de factores de -18 y se determina la suma de cada pareja.

Factores		Suma
p	q	$p + q$
1	-18	-17
2	-9	-7
3	-6	-3
-1	18	17
-2	9	7
-3	**6**	**3**

Tabla 2

Los números que satisfacen la condición son -3 y 6.

Razonamiento

2 Encuentra y factoriza el trinomio que sea de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$.

a. $x^4 + 8x^2 - 20$ **b.** $x^2 + 7x - 3$

Solución:

a. $x^4 + 8x^2 - 20$ es de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$, porque para $n = 2$. Se tiene que:

$x^4 + 8x^2 - 20 =$
$x^{2n} + 8x^n - 20$

Existen dos números, tales que:
$pq = -20$ y $p + q = 8$
$10(-2) = -20$
$10 + (-2) = 8$
Luego, $x^4 + 8x^2 - 20 =$
$(x^2 + 10)(x^2 - 2)$

b. $x^2 + 7x - 3$ no es de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$, porque el número 3 tiene los factores que se muestran en la tabla 3 y ninguna pareja cumple la condición $p + q = 7$.

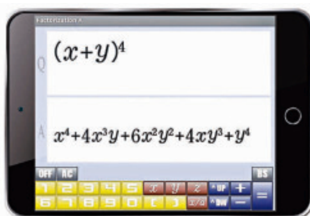
Factores		Suma
p	q	$p + q$
1	-3	-2
-1	3	2

Tabla 3

App

Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + b^{xn} + c$

Abre la aplicación *FactorizationA* y utilízala para verificar o comparar tus soluciones con las soluciones dadas por la aplicación.



Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Expresa cada polinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$. Después, factorízalos de la forma $(x^n + p)(x^n + q)$.

a. $x^2 + 2x - 35 =$ ....

b. $x^4 + 4x^2 - 5 =$ ....

c. $x^6 + 6x^3 + 9 =$ ....

d. $x^8 + 13x^4 + 42 =$ ....

e. $x^2 - 14x + 33 =$ ....

f. $x^2 - 10x + 9 =$ ....

g. $x^4 + 7x^2 + 10 =$ ....

h. $x^4 - x^2 - 12 =$ ....

i. $x^6 + 2x^3 - 15 =$ ....

j. $x^4 + 10x^2 + 24 =$ ....

k. $x^8 - 10x^4 + 24 =$ ....

l. $x^4 + 26x^2 + 144 =$ ....

m. $x^{10} - x^5y^5 - 20y^{10} =$ ....

n. $x^6 - 6x^3y^3 - 7y^6 =$ ....

Razonamiento

4 Completa la Tabla 4 con los números p y q que cumplan las condiciones dadas.

p	q	$p + q$	pq
		5	6
		3	−40
		−4	−21
		−6	−40
		−5	−24
		18	32

Tabla 4

5 Completa los siguientes trinomios para que las igualdades sean verdaderas.

a. $x^2 + \square x - \square = (x + 6)(x - 3)$

b. $m^2 + \square m - \square = (m + 9)(m - 8)$

c. $1 - \square a - \square a^2 = (1 - 8a)(1 + 6a)$

d. $x^4 - \square x^2 - \square = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$

e. $y^2 - \square y - \square = (y - 24)(y + 3)$

f. $a^2 + \square ab - \square b^2 = (a + 5b)(a - 3b)$

g. $m^2 - \square m - \square = (m - 7)(m + 4)$

6 Elige los términos p y q, de modo que se cumpla que $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$.

a. $x^2 + 5x + 6$ — 5 | 1 | 3 | 2 | 4

b. $x^4 + 6x^2 + 8$ — 2 | −7 | 4 | 2 | −1

c. $x^2 + 23x + 120$ — 2 | 15 | −6 | 8 | −9

d. $x^2 + 13x - 30$ — 1 | −5 | 15 | −4 | −2

Resolución de problemas



7 El área de la superficie plana de un modelo de mesa rectangular está dada por la expresión $x^2 + 6x + 5$.

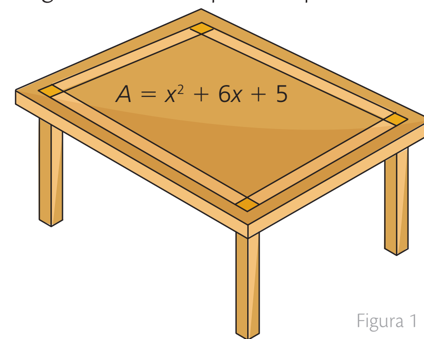
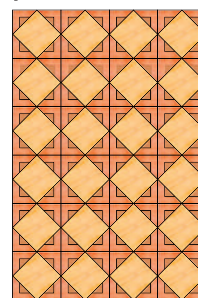


Figura 1

¿Cuáles serán las expresiones algebraicas para las medidas de sus lados?

8 La figura 2 muestra el área de un piso de madera.



$A = x^2 + 12x + 27$

Figura 2

¿Cuáles son las expresiones que representan la base y la altura de esa superficie?

9 Observa la evaluación de Mateo y después responde.

Nombre: Mateo Suárez — 2/5

1. $x^8 + 5x^4 + 4 = (x^4 + 4)(x^4 + 1)$
2. $x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3 - 7)(x^3 + 1)$
3. $a^2 - 4ab - 21b^2 = (a - 8b)(a + 3b)$
4. $x^2y^2 + xy - 12 = (xy + 4)(xy - 3)$
5. $m^2 + mn - 56n^2 = (m + 8n)(m - 7n)$

Mateo afirma que su calificación es incorrecta. ¿Por qué? ¿Cuál es la calificación correcta?

9 Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^{n} + c$

Explora

Las utilidades de una empresa procesadora de alimentos se modelan con la expresión $U = 3x^2 - 35x + 100$.



- ¿Para cuáles valores de x la compañía no tendría pérdidas ni ganancias?

La expresión $U = 3x^2 - 35x + 100$ corresponde a un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^{n} + c$. Para factorizar este trinomio, se multiplica y se divide por 3.

$$\frac{3}{3}(3x^2 - 35x + 100,) = \frac{3^2x^2 - 3(35x) + 300}{3}$$

El numerador se expresa en la forma $y^{2n} + by^{n} + d$, así:

$$\frac{(3x)^2 - 35(3x) + 300}{3}$$

Para factorizar el denominador, se buscan dos números p y q para los cuales $p + q = -35$ y $pq = 300$. Esos números son -15 y -20. Es decir:

$$\frac{(3x)^2 - 35(3x) + 300}{3} = \frac{(3x - 15)(3x - 20)}{3}$$

Se obtiene el factor común del primer factor del numerador y se simplifican términos:

$$\frac{3(x - 5)(3x - 20)}{3} = (x - 5)(3x - 20).$$

Al resolver la ecuación $(x - 5)(3x - 20) = 0$, se conocen los valores de x, en los que la empresa no tendría pérdidas ni ganancias. Esto es con $x = 5$ o $x = \frac{20}{3}$.

Un **trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^{2n} + c$,** con un número entero n, se factoriza transformándolo en un polinomio de la forma $y^{2n} + by^{n} + d$.

Ten en cuenta

$a \cdot b = 0$

si $a = 0$ o $b = 0$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^{n} + c$ se sigue este procedimiento:

1. Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del primer término. $\frac{a}{a}(ax^{2n} + bx^{n} + c) = \frac{a^2x^{2n} + a(bx^{n}) + ac}{a}$
2. Se expresa el numerador como un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^{n} + c$. $\frac{(ax^{n})^2 + b(ax^{n}) + ac}{a}$
3. Se factoriza la expresión del numerador como $(ax + p)(ax + q)$, donde $p + q = b$ y $pq = ac$. $\frac{(ax^{n} + p)(ax^{n} + q)}{a}$
4. Cuando sea posible, se simplifica a.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Factoriza el polinomio $5x^2 + 6x + 1$.

Solución:

a. Se multiplica el polinomio por $\frac{5}{5}$. → $\frac{5^2x^2 + 5(6x) + 5}{5}$

b. Se expresa el numerador de la forma $y^2 + by + d$. → $\frac{(5x)^2 + 6(5x) + 5}{5}$

c. Se buscan p y q, tales que $pq = 5$ y $p + q = 6$. → $p = 5$ y $q = 1$

d. Se expresa el trinomio factorizado. → $\frac{(5x+ 5)(5x+ 1)}{5}$

e. Si es posible, se saca factor común. → $\frac{5(x+ 1)(5x+ 1)}{5}$

f. Se simplifica y se expresa el polinomio factorizado. → $(x + 1)(5x + 1)$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Multiplica cada trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ por el valor de a.

a. $3x^2 + 6x + 2$ b. $2x^2 - 5x + 4$
c. $6x^2 - 10x + 7$ d. $5x^4 + 3x^2 + 1$
e. $7x^8 - 4x^4 + 3$ f. $4x^2 - x + 3$

3 Factoriza cada trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

a. $7x^2 - 8x + 1$ b. $5x^4 - 16x^2 + 3$
c. $2x^6 + x^3 - 6$ d. $8x^8 - x^4 - 9$
e. $3x^6 - 3x^3 - 6$ f. $6x^8 + x^4 - 2$

4 Une cada trinomio con su respectiva factorización.

a. $3a^2 + 8a + 5$	$2(3a + 1)(a + 1)$
b. $13a^2 - 7a - 6$	$(3a + 2)(7a - 1)$
c. $30a^2 + 17a - 21$	$(2a - 3)(4a + 5)$
d. $21a^2 + 11a - 2$	$(a + 1)(3a + 5)$
e. $6a^2 + 22a + 20$	$(6a + 7)(5a - 3)$
f. $8a^2 - 2a - 15$	$(13a + 6)(a - 1)$
g. $10a^2 + 7a - 12$	$(2a + 3)(5a - 4)$
h. $6a^2 + 8a + 2$	$2(a + 2)(3a + 5)$

5 Escribe V si la factorización es verdadera o F si es falsa.

a. $6m^2 + m - 15 = (3m + 5)(2m + 3)$ ( )
b. $8m^2 + 26m - 24 = (4m - 3)(m + 4)$ ( )
c. $10m^2 - 13m - 3 = (2m - 3)(5m + 1)$ ( )
d. $16m^2 + 8m + 1 = (4m + 1)(4m + 1)$ ( )
e. $6m^2 - m - 2 = (3m - 2)(2m + 1)$ ( )
f. $3m^2 + 10m + 7 = (3m + 7)(3m + 1)$ ( )

Razonamiento

6 Calcula el producto para encontrar el trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, en cada caso.

a. $(8x + 3)(8x - 5)$
b. $(6x^2 + 12)(6x^2 + 3)$
c. $(3x^5 - 1)(3x^5 + 4)$

7 Escribe el trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ que cumpla las condiciones y factorízalo.

a. $a = 7$; $b = 9$; $c = 2$ y $n = 2$
b. $a = 9$; $b = 2$; $c = -3$ y $n = 10$
c. $a = 5$; $b = 13$; $c = -6$ y $n = 4$
d. $a = 2c$; $b = 9$; $c = -3$ y $n = 3$

Comunicación

8 Completa los espacios en blanco para que las factorizaciones sean correctas.

a. $4x^4 + 8x^2 + 3 = (\square + 3)(\square + 1)$
b. $2x^4 + 5x^2 + 3 = (2x^2 + \square)(x^2 + \square)$
c. $3x^6 - x^3 - 2 = (x^3 \square 1)(3x^3 \square 2)$
d. $8x^8 - 10x^4 + 3 = (\square - \square)(2x^4 \square 1)$
e. $7x^2 + 22x + 3 = (\square + 3)(\square + \square)$
f. $3x^2 + 8x - 3 = (x \square 3)(\square - 1)$
g. $2x^2 + 11x + 15 = (2x + \square)(x \square 3)$
h. $6x^2 + 53x + 40 = (\square + 5)(\square + \square)$

9 Selecciona la expresión factorizada de cada polinomio.

a. $3x^2 + 7x - 10$
- $(3x + 10)(x - 1)$
- $(3x + 10)(3x - 1)$
- $(4x^2 + 8)(4x^2 - 6)$

b. $4x^4 + 2x^2 - 12$
- $(x^2 + 2)(4x^2 + 8)$
- $2(x^2 + 2)(2x^2 - 3)$
- $(2x^2 + 6)(x^2 - 1)$

c. $2x^4 + 4x^2 - 6$
- $(2x^2 + 6)(2x^2 + 2)$
- $(x^2 - 1)(2x^2 - 6)$
- $(2x^2 + 1)(x - 4)$

d. $2x^2 - 7x - 4$
- $(2x^2 + 1)(x^2 - 4)$
- $(2x + 1)(x - 4)$
- $(4x + 9)(x + 2)$

Resolución de problemas



10 El polinomio que describe las utilidades de una empresa que fabrica vehículos de gama media corresponde al trinomio $5x^2 + 9x - 44$, donde x representa la cantidad de vehículos fabricados.

a. Factoriza la expresión.
b. ¿Para cuáles valores de la variable x las utilidades de la empresa son nulas?
c. ¿Con qué valores de la variable x comienza a haber utilidades en la fábrica?

10 Factorización aplicando la regla de Ruffini

Explora

Una manera fácil de identificar si un polinomio es factorizable es averiguar si tiene raíces enteras; es decir, si existen valores de x que ocasionen que el resultado del polinomio sea cero.

- Según esto, ¿es posible factorizar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$?

Las raíces enteras de un polinomio cumplen con la propiedad de ser divisores del término independiente. En $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ el término independiente es -15, luego, se buscan sus divisores y se determina cuál o cuáles lo hacen cero (Tabla 1).

Divisor	Al reemplazarlo en el polinomio	¿Es raíz?
-1	$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 13(-1) - 15 = 0$	Sí
-3	$(-3)^3 + 3(-3)^2 - 13(-3) - 15 \neq 0$	No
-5	$(-5)^3 + 3(-5)^2 - 13(-5) - 15 = 0$	Sí
-15	$(-15)^3 + 3(-15)^2 - 13(-15) - 15 \neq 0$	No
1	$(1)^3 + 3(1)^2 - 13(1) - 15 \neq 0$	No
3	$(3)^3 + 3(3)^2 - 13(3) - 15 = 0$	Sí
5	$(5)^3 + 3(5)^2 - 13(5) - 15 \neq 0$	No
15	$(15)^3 + 3(15)^2 - 13(15) - 15 \neq 0$	No

Tabla 1

Así, las raíces enteras son -1, -5 y 3 y sí es posible factorizar el polinomio.

Para **factorizar un polinomio de la forma $ax^n + bx^{n-1} + ... + tx + d$**, que tiene al menos una raíz exacta, se puede aplicar la **regla de Ruffini**.

Para factorizar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ con la regla de Ruffini:

1. Se halla o se elige una raíz r del polinomio.

Por ejemplo: -1.

2. Se aplica la regla de Ruffini, dividiendo los coeficientes del polinomio entre la raíz entera elegida en el paso anterior.

1	3	−13	−15	−1
	−1	−2	15	
1	2	−15	0	

3. Se hallan los coeficientes y el grado del polinomio cociente. Se sabe que el grado del cociente es uno menor que el del polinomio inicial.

Coeficientes: 1, 2 y -15
Polinomio cociente:
$x^2 + 2x - 15$

4. Se expresa el polinomio como el producto de $(x - r)$ por el cociente de la división del polinomio entre $(x - r)$.

$(x + 1)(x^2 + 2x - 15)$

5. Si es posible, se factoriza el cociente aplicando nuevamente la regla de Ruffini o cualquiera de los métodos de factorización.

En este caso, se factoriza el segundo factor como un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

Si $p = 5$ y $q = -3$, entonces:
$x^2 + 2x - 15 =$
$(x + 5)(x - 3)$

Así, la factorización máxima de $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ es $(x + 1)(x + 5)(x - 3)$.

Ten en cuenta

Algunas veces no es posible factorizar un polinomio porque no tiene raíces enteras, por ejemplo: $x^2 + x + 1$

1	1	1	1
	1	2	
1	2	3	

1	1	1	−1
	−1	0	
1	0	1	

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina si el polinomio $x^3 + x^2 - x - 1$ tiene raíz entera 1 y es factorizable:

Solución:

- Se aplica la regla de Ruffini y se determina que 1 es una raíz del polinomio, ya que el resultado es 0. Entonces: $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 2x^2 + 1)$.

1	1	−1	−1	1
	1	2	1	
1	2	1	0	

- Además, el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto; entonces, la factorización máxima del polinomio es: $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)^2$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla las raíces enteras de los polinomios dados, en los casos que sea posible.

a. $12x^3 + x^2 - 4x + 7$

b. $3x^4 - 2x^3 + x + 1$

c. $2x^3 - 5x^2 + 8x + 2$

d. $4x^4 - x^3 + 3x^2 + 11x + 3$

e. $6x^2 + 11x + 5$

f. $4x^3 - 7x^2 - 2x + 9$

3 Factoriza cada polinomio aplicando la regla de Ruffini.

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b. $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$

c. $x^3 - 8x^2 + 5x + 50$

d. $x^3 - x^2 + 9x - 9$

e. $x^4 - 6x^3 - 7x^2$

f. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

g. $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

h. $x^4 - 9x^2 + x + 3$

i. $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 19x - 6$

j. $x^6 - x^5 - 2x^2 + 3x - 1$

4 Selecciona las raíces de cada polinomio. Justifica cada una de tus respuestas.

a. $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216$

3; 4 — −3; 4

b. $2x^4 + 3x^3 + x - 6$

−2; −1 — −2; 1

c. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$

4; 3; −1 — −4; 3; 1

d. $x^3 + 4x^2 - x - 4$

4; 2; 1 — −4; −1; 1

e. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

−3; −1 — −3; 1

f. $5x^3 + 4x^2 - 5x - 4$

1; −1 — −4; 4

5 Indica si los valores dados son raíces o no del polinomio: $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

a. $x = -1$ b. $x = 1$ c. $x = -2$

d. $x = 2$ e. $x = -4$ f. $x = 4$

6 Completa las divisiones de cada polinomio aplicando la regla de Ruffini.

a.

1	1	−1	−1	1
	1	□	1	
1	□	1	□	

b.

1	−1	−4	4	□
	2	□	−4	
1	□	□	□	

c.

1	−1	−1	4	−2
	□	□	□	
1	□	□	0	

d.

1	1	−1	−1	−1
	□	□	□	
1	□	□	0	

e.

1	−1	−4	4	1
	□	□	□	
1	□	□	0	

f.

6	−5	−8	3	−1
	−6	□	□	
6	□	3	0	

Razonamiento

7 Indica para cuáles polinomios, $(x - 3)$ es un factor.

a. $x^6 - 20x^3 + x^2 - 198$

b. $x^8 + 2x^2 - 15x + 321$

c. $-5x^5 + 20x^4 - 15x^3$

d. $2x^4 + x^3 - x - 186$

8 Indica para qué valores de a, $(x + 2)$ es un factor del polinomio $x^5 + 2x^2 + ax + 14$.

a. -27 b. 5 c. -10 d. 14

9 Señala para cuáles polinomios, $x + 3$ es un factor.

a. $2x^3 + 9x^2 + 4x$

b. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$

c. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 3$

d. $2x^3 + 9x^2 + 4x + 15$

Resolución de problemas



10 El hermano menor de Lucas ha dado sus primeros pasos de pintura en la tarea de matemáticas del mayor. Ayúdale a Lucas a encontrar los números que quedaron ocultos y escribe la expresión factorizada del polinomio.

1	−4	−1	16	−12	1
	1				
1		−4	12	0	

Practica Más

Factorización de polinomios. Factor común

Ejercitación

1. Determina el factor común de cada polinomio.

a. $4x - 2$ **b.** $8x - 6$
c. $9x^2 - 6x$ **d.** $12x^6 - 4x^4$
e. $24a^2b^4c^2 - 36b^2c^4$ **f.** $15x^3 - 6x^4 + 12x$
g. $4a^2b^4 - 6b^2c^4 + 10ab^3c$ **h.** $9p^3q^4r^5 - 18p^5q^2$
i. $7y^2 - 14y^2z^4 + y$ **j.** $21a^2c^2 - 77ab^4$

2. Factoriza los siguientes polinomios utilizando el factor común por agrupación de términos.

a. $2x^2 + x + 4x + 2$ **b.** $3x^2 + 9x + x + 3$
c. $8x^2y + 2x - 8xy + 2$ **d.** $12a^2 - 8a - 3a + 2$
e. $6a^2 + 15a - 4a - 10$ **f.** $9q + 3p + 18pq + 6p$
g. $3x^2y - 2x^2y + 6x^2y + x^3$ **h.** $l^3 - 3l + 2l^2 - 6$
i. $x^2 + x + 3x + 3$ **j.** $x^2 + x + x + 1$

Comunicación

3. Encuentra los polinomios que representan las dimensiones de cada rectángulo.

A.

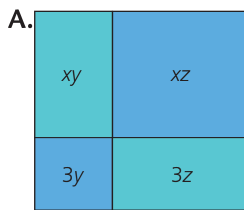


Figura 1

B.

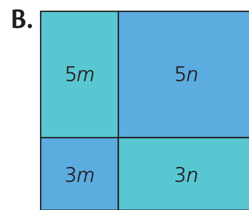


Figura 2

Diferencia de cuadrados perfectos

Ejercitación

4. Relaciona cada polinomio con su factorización.

a. $x^2 - 4y^2$ $(3x + 5)(3x - 5)$
b. $9x^2 - 25y^2$ $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$
c. $x^4 - 16$ $(x + 2y)(x - 2y)$
d. $9x^2 - 25$ $(3x + 5y)(3x - 5y)$

Suma y diferencia de cubos perfectos

Comunicación

5. Halla la expresión algebraica factorizada en cada caso.

a. A un cubo de arista x se le quitan 8 cubos de arista y.

b. A un cubo de $2x$ de lado se le adicionan 9 cubos de arista $3y$.

c. A un cubo de arista $(p + q)$ se le quitan 8 cubos de arista $(a + b)$.

d. A un cubo de volumen $27x^3$ se le adiciona un recipiente de $125y^3$.

6. Factoriza los siguientes binomios.

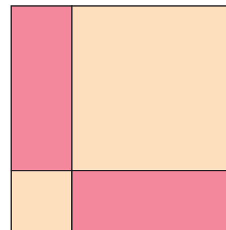
a. $1 - x^3$ **b.** $x^3 + 64$
c. $8x^3 - 1$ **d.** $216 + 512a^3$
e. $(a + b)^3 - 27$ **f.** $1 + (x - 3)^3$

Trinomio cuadrado perfecto

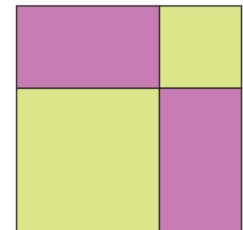
Resolución de problemas

7. Ubica la expresión del área de cada región. Luego, halla las dimensiones de cada lado del cuadrado exterior y escribe la factorización correspondiente.

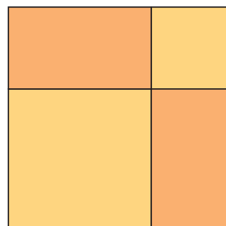
a. $9x^2 + 6x + 1$


Figura 3

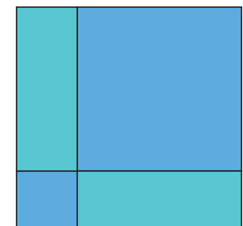
b. $4x^2 + 12x + 9$


Figura 4

c. $x^2 - 2xy + y^2$


Figura 5

d. $9x^2 - 54x + 81$


Figura 6

Trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Razonamiento

8. Completa los términos que faltan en cada caso para que la factorización sea verdadera.

a. $x^2 + \square x + 10 = (x + 5)(x + \square)$

b. $\square^2 - \square x - \square = (x + 4)(x - 6)$

c. $x^4 + 4x^2 + 3 = (\square + \square)(\square + \square)$

d. $x^2 + 11x - \square = (\square + 12)(\square - \square)$

9. Factoriza los siguientes polinomios.

a. $6a^2 + a - 2$ **b.** $2x^2 + 7x + 3$
c. $3z^2 + 20z + 12$ **d.** $5x^2 - 7x - 6$
e. $8a^2 + 33a + 4$ **f.** $2x^2 + 3x + 7$

Resolución de Problemas

Estrategia: Calcula el área sombreada

Problema

En la Figura 7 el lado del cuadrado exterior es $4x + 6$ y el área del cuadrado interior es $8x^2 + 24x + 18$.

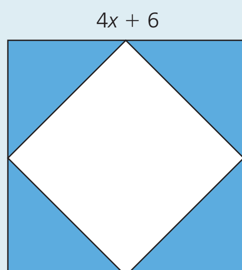


Figura 7

¿Cuál es el área de la región sombreada?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona la gráfica?
  R: La expresión que determina el lado de un cuadrado en el que, uniendo los puntos medios de cada lado, se forma otro cuadrado más pequeño.
- ¿Qué debes encontrar?
  R: La expresión que determina el área de la región sombreada.

2. Crea un plan

- Encuentra una expresión que te permita calcular el área del cuadrado exterior y réstale el área del cuadrado interior.

3. Ejecuta el plan

- El área de cuadrado exterior es $(4x + 6)^2$. Esta expresión corresponde a un trinomio cuadrado perfecto.

$$(4x + 6)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 6 + 6^2$$
$$= 16x^2 + 48x + 36$$

- El área de la región sombreada corresponde a:

$$16x^2 + 48x + 36 - (8x^2 + 24x + 18)$$
$$16x^2 + 48x + 36 - 8x^2 - 24x - 18$$
$$8x^2 + 24x + 18$$

R: El área de la región sombreada se determina con la expresión $8x^2 + 24x + 18$.

4. Comprueba la respuesta

- Asígnale diferentes valores a x, y verifica que área del cuadrado interior equivale a la mitad del área del cuadrado exterior.

Aplica la estrategia

1. La Figura 8 muestra el área del césped de un jardín que está en un centro comercial.

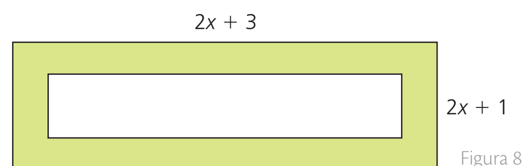


Figura 8

Si el ancho de césped es de 1m, ¿cuál es la expresión que determina el área total del césped?

A. Comprende el problema

....

....

B. Crea un plan

....

....

C. Ejecuta el plan

....

....

D. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Enrique descompuso el número 420 en sus factores primos así: $420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
   A. ¿Consideras que cometió algún error?
   B. ¿Cuál sería la respuesta correcta?
3. Si el área de un cuadrado se determina con la expresión $169x^2 - 78x + 9$, ¿cuál es el polinomio que corresponde a la medida de su lado?
4. El área de un rectángulo es $x^2 + 10x + 21$. Si uno de sus lados mide $(x + 7)$, ¿cuál es su perímetro?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 9 y resuélvelo.

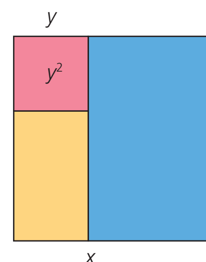


Figura 9

11 Ecuaciones

Explora

Una igualdad compara dos expresiones matemáticas mediante el signo igual (=). Observa estas igualdades:

$5 + 4 = 9$

$x + 5 = 7 - x$

- Clasifica cada igualdad según sea numérica o algebraica.

11.1 Igualdades y ecuaciones

Las igualdades pueden ser **numéricas**, si solamente comparan números relacionados mediante las operaciones, o **algebraicas,** si comparan expresiones que involucran números y letras.

De acuerdo con lo anterior, la igualdad $5 + 4 = 9$ es numérica, mientras que la igualdad $x - 5 = 7 - x$ es algebraica.

Las **ecuaciones** son igualdades algebraicas que, al sustituir las letras por ciertos valores, se convierten en igualdades numéricas.

Las **soluciones de una ecuación** son los valores que pueden tomar las incógnitas, de manera que al sustituirlos en la ecuación se satisface la igualdad.

Ejemplo 1

Para verificar que $x = 9$ es solución de la ecuación $5x + 22 = 2x + 49$, se reemplaza ese valor en la ecuación dada. Observa:

$$5x + 22 = 2x + 49$$
$$5(9) + 22 = 2(9) + 49$$
$$45 + 22 = 18 + 49$$
$$67 = 67$$

Como la igualdad se satisface, entonces se afirma que $x = 9$ sí es solución de la ecuación $5x + 22 = 2x + 49$.

Ejemplo 2

Analiza las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $7x = 56$ es una ecuación que tiene una única solución: $x = 8$.

b. $2x^2 = 18$ tiene dos soluciones. Observa: $x^2 = 9$, entonces $x = 3$ o $x = -3$.

c. $2x - x = 12 + x$ no tiene solución, ya que al reducir términos semejantes se obtiene $0 = 12$, que no corresponde a una igualdad verdadera.

d. $5x + 1 - 3x = 2x + 1$ es una ecuación que representa una identidad, ya que al reducir términos semejantes se obtiene la siguiente igualdad: $2x + 1 = 2x + 1$.

Ten en cuenta

En toda ecuación se identifican dos miembros: el primero, al lado izquierdo del signo igual (=) y el segundo, al lado derecho.

11.2 Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Para obtener una ecuación equivalente a otra dada, se aplican estas propiedades:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta el mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un número distinto de 0, se obtiene otra ecuación equivalente.

Ejemplo 3

Las ecuaciones $3x + 10 = 25$ y $5x = 25$ son equivalentes, pues ambas tienen como solución el valor $x = 5$. Observa:

$3 \cdot (5) + 10 = 25$ $\qquad$ $5 \cdot (5) = 25$

Ten en cuenta

Una ecuación se puede visualizar como una balanza en equilibrio. Cada miembro de la ecuación correspondería a un platillo de la balanza de la Figura 1

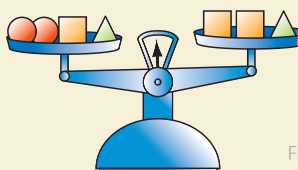


Figura 1

Para mantener el equilibrio de la balanza, "todo lo que se haga en un platillo debe hacerse en el otro". En este caso, un cuadrado equivale a dos círculos.

Análogamente, para mantener la igualdad en una ecuación, "todo lo que se haga en un miembro de la ecuación debe hacerse en el otro".

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos.

Actividad resuelta

Comunciación

1 Resuelve $5x + 22 = 2x + 49$, hallando ecuaciones equivalentes.

Solución:

Para llegar a la solución de la ecuación, mediante un razonamiento lógico, se aplican las propiedades estudiadas. Entonces:

$5x + 22 = 2x + 49$ ← Se parte de la ecuación dada.

$5x + 22 - 22 = 2x + 49 - 22$ ← Se resta 22 a los dos miembros.

$5x = 2x + 27$ ← Se realizan las operaciones.

$5x - 2x = 2x - 2x + 27$ ← Se resta $2x$ a los dos miembros.

$3x = 27$ ← Se reducen términos semejantes.

$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) = \left(\frac{1}{3}\right)(27)$ ← Se multiplican por $\frac{1}{3}$ los dos miembros.

$x = 9$ ← Se simplifica y se obtiene la solución.

Las ecuaciones $5x = 2x + 27$ y $3x = 27$ son equivalentes a la ecuación dada y, por lo tanto, tienen la misma solución: $x = 9$.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación



www.e-sm.net/8smt07

Encontrarás diferentes actividades relacionadas con la resolución de ecuaciones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica si estas igualdades son numéricas o algebráicas.

a. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

b. $\frac{1}{5}x + 4y = -11$

c. $-7 - 18 = 25(-3 + 2)$

d. $23 + (-12) + 5 = -15(-7 + 5)$

e. $5x - 9 = 29 - 6x$

Razonamiento

3 Identifica y marca con una X la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $y - 5 = 3y - 25$

8 | 10 | 15 | 20

b. $5x + 6 = 10x + 5$

$\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$

c. $9y - 11 = -10y + 12y$

$-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{11}{7}$

d. $\frac{1}{5}x + 4 = -12$

-80 | -100 | -150 | -200

4 Observa la Figura 2. Luego, contesta la pregunta.

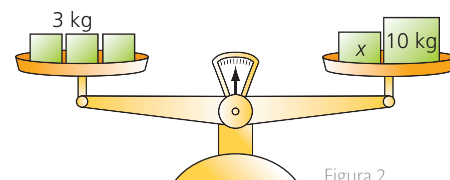


Figura 2

• ¿La balanza está en equilibrio? Si no es así, propón una manera de conseguir que lo esté.

Comunicación

5 Realiza las transformaciones indicadas en la ecuación $3(6 - x) - (2 + x) = 0$.

a. Aplica la propiedad distributiva.

b. Realiza las operaciones.

c. Adiciona el término $4x$, a los dos lados de la igualdad.

d. Divide entre 4 los dos miembros de la igualdad.

e. Determina: ¿cuál es la solución?

Resolución de problemas



6 Juan pagó $ 90 por seis entradas para cine. ¿Cuánto pagó por cada entrada?

12 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

En la Figura 1 se observa que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos internos del $\triangle ABC$.

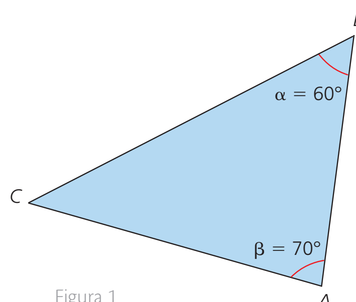


Figura 1

- Escribe una ecuación que permita calcular la medida del $\angle C$. ¿Qué características tiene esta ecuación?
- ¿Qué nombre reciben este tipo de ecuaciones?

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180° y, como en el $\triangle ABC$ la suma de los ángulos A y B es igual a 130°, para calcular la medida del $\angle C$ se puede plantear una ecuación como la siguiente.

Medida del $\angle C$

$$x + 130° = 180°$$

Suma de las medidas de $\angle A$ y $\angle B$

Se observa que, en la ecuación $x + 130° = 180°$, el lado izquierdo es un polinomio en x de grado 1. A este tipo de ecuaciones se les denomina "ecuaciones de primer grado con una incógnita" o "ecuaciones lineales".

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** (también llamada **ecuación lineal**) es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y el exponente de la incógnita x es 1.

Ejemplo 1

A continuación se presentan algunos ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incónita.

$$3x + 2 = 5 \qquad p - \frac{46}{5} = 52 \qquad w - (-128) = \sqrt{2}$$

En todos los casos, el exponente de las incógnitas x, p y w es, respectivamente, 1.

12.1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita se resuelve transformándola en ecuaciones equivalentes hasta despejar la incógnita.

Ejemplo 2

Un bebé recién nacido tiene 300 huesos. Esto es, 94 más que en la edad adulta, cuando algunos se fusionan.

Para calcular la cantidad de huesos que tiene un adulto, se puede modelar la situación mediante una ecuación de primer grado con una incógnita. Entonces:

Si x representa la cantidad de huesos de un adulto, $x + 94 = 300$.

El proceso para resolver la ecuación es el siguiente:

$x + 94 = 300$

$x + 94 + (-94) = 300 + (-94)$ ← Se suma el opuesto de 94 en ambos miembros de la igualdad.

$x = 206$ ← Se efectúan las operaciones indicadas.

Para verificar que el valor $x = 206$ es la solución de la ecuación, se reemplaza en la expresión original. Por lo tanto:

$x + 94 = 300$

$206 + 94 = 300$

$300 = 300$

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos.

Ejemplo 3

En una cancha de voleibol como la que se muestra en la Figura 2, la medida del ancho es 9 m; esta medida equivale a la sexta parte del perímetro *x*.

La relación entre el perímetro *x* de una cancha de voleibol y la medida del ancho se puede representar mediante una ecuación de primer grado con una incógnita. Así:

Perímetro

$$\frac{1}{6}x = 9$$ ← Ancho

En este caso, la solución se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{6}\ x = 9$$

$6 \cdot \frac{1}{6}x = 9 \cdot 6$ ← Se multiplican los dos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{6}$.

$x = 54$ ← Se despeja la incógnita y se obtiene su valor.

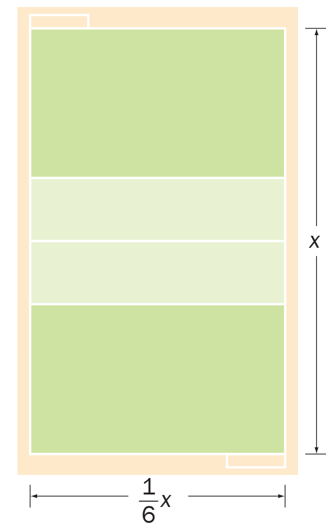


Figura 2

12.2 Ecuaciones de primer grado con la incógnita en más de un término

Cuando una **ecuación** tiene la **incógnita en más de un término**, se reducen términos semejantes para llegar a resolver una ecuación de la forma general $ax + b = c$.

Ejemplo 4

Para resolver la ecuación $x + x + 1 = 11$, se procede de esta forma:

$x + x + 1 = 11$ ← Se agrupan las incógnitas y los términos independientes.

$x + x = 11 - 1$ ← Se reducen los términos semejantes.

$2x = 10$ ← Se simpifica dividiendo entre 2.

$x = 5$

12.3 Ecuaciones de primer grado con paréntesis

Para eliminar los paréntesis de una ecuación, se aplica la propiedad distributiva. Si antes del paréntesis no hay un coeficiente, se considera que este es 1.

Ejemplo 5

Para resolver la ecuación $4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6$, el primer paso es obtener una ecuación equivalente sin paréntesis. Observa:

$4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6$ ← Se parte de la ecuación.

$4x + 8 - 7x + 14 = x + 6$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$-3x + 22 = x + 6$ ← Se reducen los términos semejantes.

$22 = 4x + 6$ ← Se adiciona $3x$ en ambos miembros de la ecuación.

$x = 4$ ← Se sustrae 6 en ambos miembros, se transponen términos y se simplifica dividiendo entre 4.

Ten en cuenta

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y a la sustracción es:

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

$a \cdot (b - c) = ab - ac$

12 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ejemplo 6

Para resolver la ecuación $-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$, se pueden tener en cuenta los siguientes pasos.

$-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$ ← Se parte de la ecuación dada.

$-4x + 2 + 6 = 4x - 8$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$-4x + 8 = 4x - 8$ ← Se simplifican términos semejantes.

$-8x = -16$ ← Se suman $-4x$ y -8 en ambos miembros de la igualdad y se reducen términos semejantes.

$x = 2$ ← Se divide entre -8 en ambos miembros de la igualdad.

12.4 Ecuaciones de primer grado con denominadores

Para **eliminar los denominadores de una ecuación**, se multiplican los dos miembros de esta por un múltiplo común de los denominadores. La ecuación equivalente más sencilla se obtiene al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo 7

Para resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$, el primer paso es obtener una ecuación equivalente sin denominadores.

Esto se consigue multiplicando la ecuación por cualquier múltiplo común de los denominadores: 12, 24, 36, 48, … Entonces:

$\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$ ← Se parte de la ecuación dada.

$\frac{12x}{2} + \frac{36x}{4} - \frac{60x}{6} = 360$ ← Se multiplica, por ejemplo, por 12, en ambos miembros de la igualdad.

$6x + 9x - 10x = 360$ ← Se simplifican las fracciones.

$5x = 360$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = 72$ ← Se simplifica dividiendo entre 5 ambos términos.

CULTURA del Buen Vivir

El equilibrio

Una persona equilibrada muestra un perfecto balance entre lo que siente por sí misma y por los demás. Por ejemplo: se respeta, se valora y reconoce sus habilidades, pero también es capaz de mostrar esos mismos sentimientos y apreciaciones hacia los demás.

- Si pones en una balanza las cosas positivas que piensas de ti y las cosas positivas que piensas de tu mejor amigo, ¿la balanza estará equilibrada?

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la ecuación $\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{7} = 2$.

Solución:

Al resolver la ecuación, se obtiene una cadena de ecuaciones equivalentes, así:

$\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{7} = 2$ ← Se parte de la ecuación original.

$21\left(\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{7}\right) = 21 \cdot 2$ ← Se multiplican por 21 ambos miembros de la igualdad.

$7(x + 1) + 3(x + 2) = 42$ ← Se simplifican los denominadores.

$7x + 7 + 3x + 6 = 42$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$10x = 29$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = \frac{29}{10}$ ← Se dividen ambos lados de la igualdad entre 10.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R en la solución de problemas sencillos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve cada ecuación.

a. $7x - 15 = 20$

b. $-5x - 8 = 12$

c. $4x - 10 = 26$

d. $-6x - 18 = 10$

Comunicación

3 Obtén en una ecuación de la forma $ax + b = c$, con a, b y c números reales. Luego, resuélvela.

a. $x = 5x - 13$

b. $9x - 4 = 2x$

c. $x + 5x = -10 + 3$

d. $4x - 5x - 9 = 3x + 4x$

e. $4x - 9x + 2 = 7x - 5x - 9$

f. $3x - 8x + 9x = 12 - 7x$

4 Aplica la propiedad distributiva y resuelve.

a. $7(x - 5) - x = 3$

b. $-3(2x - 5) - 5x = 3x$

c. $7(x - 2) - 6x + 1 = 3 - 4x$

d. $4x + 2(2x - 5) = (x - 3) - (8 - x)$

e. $3 + 8(6 - x) = -2(x - 5)$

f. $9x - 2(x - 4x) = 3x - 2(3 - x)$

g. $4x - 7x + 5 = 2 - 4(3x + 1)$

h. $3x + (2x - 3) = 7(x - 2) - x$

5 Elimina los denominadores y resuelve.

a. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = \sqrt{6}$

b. $9\pi - 15 = -\frac{9}{7}$

c. $\frac{3}{10}x - \frac{2}{15} = -\frac{4}{5}$

6 Halla la solución de cada ecuación.

a. $\frac{x-2}{5} + \frac{x}{4} = \sqrt{2}$

b. $\frac{x-2}{9} + \frac{x-7}{3} = -4$

c. $\frac{2x-3}{4} + \frac{2x+3}{3} = -1$

d. $\frac{x-6}{4} - \frac{2x+1}{2} - 3 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

e. $\frac{x-1}{6} - \frac{3x+2}{3} + 1 = \frac{x}{12} + \frac{1}{6}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $2\left(\frac{x-1}{4} - 4\right) - 3\left(\frac{2x}{9} - 1\right) = 9$

b. $-3\left(\frac{7x}{3} - \frac{2x}{4}\right) - \frac{5x+1}{3} = \frac{11x}{6}$

c. $-6\left(\frac{4x}{9} - \frac{8x-1}{3}\right) - \frac{5x+2}{3} = -1$

Razonamiento

8 Para cada enunciado, escribe una expresión algebraica.

a. El doble del número n disminuido en 3 es igual a 15.

b. El número n excede en 12 a 29.

c. La suma del número n y el posterior es 32.

d. Las dos terceras partes de n equivalen a 18

9 Escribe en palabras cada ecuación propuesta:

a. $\frac{n}{4} + 1 = 5$

b. $\frac{n+1}{4} + 15 = -7$

c. $\frac{2n-1}{4} - 1 = 20$

10 Plantea una ecuación que modele cada problema.

a. El triple de un número menos 30 es igual a 6. ¿Cuál es el número?

b. En una academia de idiomas, el número de personas que estudian francés es la mitad del número que estudian inglés. Calcula cuántas personas hay en cada grupo si en total son 240.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

11 La edad de Alicia excede en 3 años la edad de Isabel. La edad de María es la mitad de la edad de Isabel. La suma de las tres edades es 93 años.

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa al enunciado anterior?

a. $(x + 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

b. $(x - 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

c. $\left(\frac{x}{2} + 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

d. $\left(\frac{x}{2} - 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

13 Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

Ayer gasté \$3 y hoy mis padres me dieron \$5. Ahora tengo \$7.



Luis Hernández

- ¿Cuánto dinero tenía ayer antes de gastarme los \$ 3?

Ten en cuenta

La palabra álgebra proviene del libro *Al-jabr w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad en el año 825 aproximadamente, por el matemático y astrónomo Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi. *Al-jabr* significa trasposición y hace referencia al paso de términos de un miembro a otro de una ecuación; por su parte, *w'al-muqabalah* indica la supresión de términos iguales en los dos miembros de una ecuación. La incógnita se llamaba *sahy* (cosa), nombre que se utilizó hasta cuando, mucho tiempo después, se decidió el uso de símbolos para resolver ecuaciones.



Estampilla conmemorativa de Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi.

Si se llama x al dinero que tenía el niño ayer antes de gastarse los \$ 3, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x - 3 + 5 = 7$$

Luego:

$$x = 7 + 3 - 5$$
$$x = 5$$

Por lo tanto, el niño tenía \$5.

13.1 Lenguaje verbal y lenguaje algebraico

El **lenguaje algebraico** permite expresar mediante símbolos matemáticos enunciados de situaciones que se deben resolver en la vida diaria o en las ciencias.

Ejemplo 1

Observa cómo traducir expresiones del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, para un número entero n cualquiera.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
La suma de n y su mitad.	$n + \frac{n}{2}$
El número que excede a n en 17 unidades.	$n + 17$
El número anterior a n.	$n - 1$
La cuarta parte de n.	$\frac{n}{4}$
El cuadrado de n.	n^2
El cuadrado de la suma de n y el número siguiente a n.	$[n + (n + 1)]^2$

Tabla 1

Para resolver problemas que involucran ecuaciones lineales, se propone la siguiente **ruta metodológica**.

1.° **Comprende**: analiza la situación planteada; determina la pertinencia y suficiencia de los datos y del alcance de la pregunta.

2.° **Planea**: analiza las opciones de solución y selecciona el procedimiento que consideras que se debe seguir.

3.° **Resuelve**: ejecuta el plan de acción para resolver el problema (planteamiento y solución de la ecuación).

4.° **Comprueba o verifica**: confronta los resultados obtenidos con el enunciado y la pregunta del problema. Verifica la validez de la respuesta.

Después de interiorizar esta ruta podrás utilizar la misma estrategia para resolver otros probemas similares.

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Plantea una ecuación que modele el siguiente problema y resuélvelo.

Hace ocho años, un padre tenía siete veces la edad de su hijo, pero ahora tiene solo tres veces la edad del hijo. ¿Cuáles son las edades de ambos en este momento?

Solución:

1. Comprende

Observa que la información de la Tabla 2 permite entender la relación entre los datos proporcionados en el enunciado del problema.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Edad actual del padre.	x
Edad actual del hijo.	$\frac{x}{3}$
Edad del padre hace ocho años.	$x - 8$
Edad del hijo hace ocho años.	$\frac{x-8}{7}$

Tabla 2

2. Planea

En este paso se plantea la ecuación que expresa las relaciones entre los datos del problema. Después, se resuelve.

3. Resuelve

La ecuación correspondiente a la situación planteada es:

$$\frac{x}{3} - 8 = \frac{x-8}{7}$$

Su solución es la siguiente:

$$21 \cdot \left(\frac{x}{3} - 8\right) = 21 \cdot \frac{x-8}{7}$$ ← Se multiplican los miembros de la igualdad por el m.c.m. de los denominadores.

$$7x - 168 = 3x - 24$$ ← Se resuelve la ecuación obtenida.

$$4x = 144$$

$$x = 36$$

Por lo tanto:

La edad actual del padre es: $x = 36$ años.

La edad actual del hijo es: $\frac{x}{3} = 12$ años.

4. Comprueba

Al reemplazar $x = 36$ en la ecuación planteada, se verifica la igualdad.

$$\frac{36}{3} - 8 = \frac{36-8}{7}$$

$$12 - 8 = \frac{28}{7}$$

$$4 = 4$$

Ten en cuenta

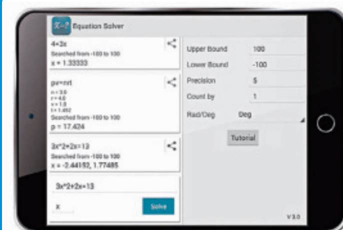
François Viète (1540-1603) fue el primer matemático que introdujo el uso de las letras para representar valores en la resolución de problemas.



App

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Abre la aplicación *Equation Solver* y utilízala para comparar los resultados que obtuviste.



13 Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Calcula el número al cual si se le suma 3, da 12.

3. Obtén el número cuyo doble más su triple suma 80.

4. Determina qué número, sumado consigo mismo cuatro veces más su triple da como resultado 96

5. Escribe en lenguaje algebraico los enunciados y resuélvelos.
   a. La suma de dos números consecutivos es 79.
   b. La suma de dos números pares consecutivos es 126.
   c. El doble de un número y dicho número suman 27.
   d. El doble de la suma de un número más 7 es 36.
   e. El triple de un número menos 8 es 70.
   f. Cinco veces un número menos dicho número es 80.

6. Encuentra dos números sabiendo que su suma es 20 y se diferencian en seis unidades.

Resolución de problemas



7. La edad de Carlos es el triple de la edad de Juan. La suma de sus edades es 48. ¿Cuál es la edad de Carlos?

8. Un número se multiplica por 9 y el resultado es el número aumentado en 112. ¿Cuál es el número inicial?

9. Halla un número que, aumentado en $\frac{2}{3}$, equivale al doble del número.

10. La cuarta parte de un número, aumentado en $\frac{4}{3}$, equivale a la tercera parte del número.

11. Pablo tiene $ 26 en monedas de 10 centavos y de 25 centavos. En total, Pablo tiene 16 monedas; si tiene tantas monedas de 25 centavos como de 10 centavos, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?


SM Ediciones

12. Las longitudes de los lados de un triángulo son números impares consecutivos. El perímetro es 69 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?

13. Jaime tiene $5 más que Daniel y Daniel tiene $35 más que Juan. Reuniendo lo que todos tienen, el total de dinero es $174. ¿Cuánto tiene cada uno?

14. En tres días, Luis recorrió 90 km. El segundo día recorrió $\frac{3}{4}$ de lo que recorrió el primer día y el tercer día recorrió $\frac{2}{3}$ de lo que recorrió el segundo día.
   ¿Cuántos kilómetros recorrió cada día?

15. La suma de dos números es 55 y uno de ellos es cuatro veces el otro. Halla los dos números.

16. La suma de tres números es 330. El primero es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcula los tres números.

17. Jaime viajó a Nueva York. Un trayecto en taxi allá tiene un cargo fijo de $ 2,50 y de $1,50 por cada kilómetro. Si Jaime pagó $ 13, ¿qué distancia recorrió?

18. En un parque zoológico hay el doble de mamíferos que de reptiles y, en total, hay 324 animales de esas dos clases. ¿Cuántos mamíferos y cuántos reptiles hay?

19. Carlos, David y Sergio han ganado $300 y deciden repartirlos así: Carlos tendrá $20 menos que Sergio, y David $20 menos que Carlos. Calcula el dinero que obtuvo cada uno.

20. Juan realiza un viaje de 160 km en total. La primera parte del viaje recorre tres cuartas partes del recorrido en carro. Luego, va en moto y recorre la cuarta parte de lo que recorrió en carro. Después, monta en bicicleta y recorre un cuarto de lo que recorrió en moto. Y, los últimos kilómetros los recorrió a pie.
   a. ¿Qué distancia recorrió en total?
   b. ¿Qué longitud recorrió en cada medio de transporte?

   motocicleta: ______ carro: ______
   bicicleta: ______ a pie: ______

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

21 Luis tiene 92 monedas de 50, 10 y 25 centavos Si las monedas de 50 centavos son la tercera parte de las de 10 centavos y estas son el quíntuplo de las monedas de 25 centavos, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?

22 Ana entrena cada día aumentando el recorrido del día anterior en 1 km. Al cabo de siete días, recorrió en total 42 km. ¿Cuánto entrenó el último día?

23 Preguntamos la hora y nos contestan de la siguiente manera: "Lo que queda de día es igual a dos veces las horas que han transcurrido". ¿Qué hora es?

24 Averigua mi edad si tengo el triple de la edad que tenía hace ocho años.

25 Una mamá tiene 36 años y las edades de sus tres hijos suman 18 años.

a. ¿Cuántos años faltan para que las edades de los hijos sumen la edad de la mamá?

b. ¿Cuántos años deben pasar para que las edades de los hijos sumen el doble de la edad de la mamá?

26 Un número es el doble de otro. Al sumar ambos números da 33. ¿De qué números estamos hablando?

27 La suma de un número más la mitad del mismo número es 24. ¿Cuál es ese número?

28 Al doble de un número le restamos cinco unidades y el resultado coincide con ese número menos dos unidades. ¿De qué número se trata?

29 Arturo tiene 26 láminas más que Pablo y entre los dos tienen 72 láminas. ¿Cuántos láminas tiene Arturo?

30 Lucía tiene el doble de dinero que su hermana y entre las dos tienen $ 36 ¿Cuánto dinero tiene cada una?

31 En una granja hay cuatro veces más vacas que caballos. Si en total hay 50 animales, ¿cuántas vacas hay?


SM Ediciones

32 Si la edad de una persona es x años, ¿qué representan las siguientes expresiones?

a. $x - 8 = 19$

b. $x - 8 = 3$

c. $2(x + 8) = 38$

33 Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40 000 barriles?

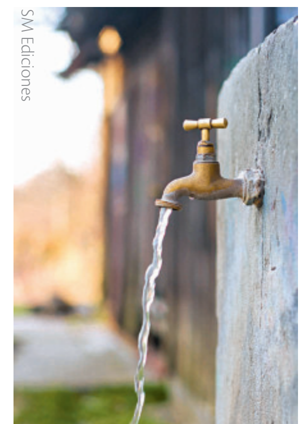

SM Ediciones

34 Julián tiene cuatro años más que su primo Eduardo y, dentro de tres años, la edad de los dos sumará 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

35 ¿Qué edad tengo ahora si dentro de doce años tendré el triple de la edad que tenía hace seis años?

36 Una llave llena un tanque en 30 minutos y otra lo llena en 90 minutos

- ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque, si las llaves están abiertas?


SM Ediciones

37 La diferencia entre las edades de A y de B es de seis años; la diferencia entre las edades de B y de C es de cinco años y la suma de las tres edades es igual a 43 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

38 Ana tiene 30 años y Lucía tiene 40. ¿Dentro de cuántos años la edad de Ana será los $\frac{5}{6}$ de la edad de Lucía?

Practica Más

Ecuaciones

Resolución de problemas

1. Expresa cada situación utilizando ecuaciones lineales. Elabora una pregunta por cada una y resuélvela.

a. El cuádruple de un número es 52.

b. La suma de tres números consecutivos es 51.

c. El perímetro de un triángulo equilátero es 36.

d. El perímetro de un rectángulo es 360 cm y su largo es el triple de su ancho.

e. El 30% de descuento de una maleta es $15.

f. La edad de Juan es el triple de la Vanessa. Juan tiene 51.

Comunicación

2. Elabora una situación que pueda ser modelada por cada una de estas ecuaciones.

a. $3x + 3 = 141$

b. $x + \frac{x}{3} = 1$

c. $x + 21 = 45$

d. $\frac{x}{3} + 12 = 141$

3. Relaciona cada ecuación de la columna A con la de la columna B que sea equivalente.

Columna A	Columna B
a. $7x + 3 = 17$	1. $\frac{126}{x} = 3$
b. $x + 3x = 20$	2. $3x + 4 = 4$
c. $9z - 4z + 7 = 27$	3. $2x + 3x = 25$
d. $3x + \frac{1}{x} = 1$	4. $6x + 3 = 15$
e. $x + 121 = 163$	5. $23x = 92$

Ejercitación

4. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $-3x + 12 = 141$

b. $x - 15 = -41$

c. $-x + 45 = -205$

d. $3 - x = 98$

e. $23 + 3 = x + 2$

f. $32 - 4 = 4x + 4$

5. Relaciona cada ecuación con su solución.

a. $-5x + 5 = 15$	1. 12
b. $x + 9 = 12 + 35$	2. -2
c. $x - 25 = 12 - 36x$	3. $-\frac{16}{3}$
d. $5x + 9x = 168$	4. 1
e. $x + 7 = -2x - 9$	5. 38

Razonamiento

6. Plantea la ecuación y halla las dimensiones de cada figura.

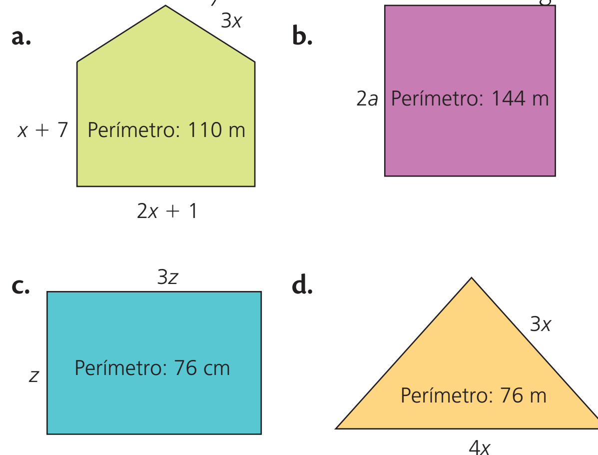


Figura 1

Resolución de problemas



7. Resuelve cada situación con el uso de ecuaciones.

a. Un almacén ofrece el 40% de descuento en sus productos. Si Juan compró una patineta y pagó $75, ¿cuánto valía la patineta sin descuento?

b. Una fábrica de botones produce 1 500 botones en una hora, pero la décima parte salen imperfectos. ¿Cuántos botones buenos se producen en dos horas?

c. La suma de tres números pares consecutivos es 54. ¿Cuáles son los tres números?

d. Tres hermanos reciben una herencia de $96 000. Luis recibe el triple que Ana y Pedro, el doble que Ana. ¿Cuánto recibe cada uno?

e. Las entradas a un concierto cuestan $45 la general y $90 la platea. Si asistieron 530 personas y los ingresos fueron de $ 39 600, ¿cuántas personas entraron a general y cuantas a platino?

Ejercitación

8. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{x}{3} + \frac{3}{5} = -\frac{7}{6}$

b. $\frac{3x + 2}{3} = 16$

c. $-3(-x + 3) = 5(2 - x)$

d. $6(x - 1) = -3$

e. $2(x + 1) = 1 - 2x$

f. $-x + 1{,}5 = x$

Resolución de Problemas

Estrategia: Plantear y resolver una ecuación

Problema

En la Figura 2 se muestra el techo de un estacionamiento. Sus dimensiones son tales que el largo es 3 m más que el doble del ancho.

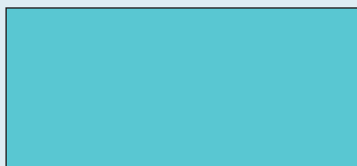


Figura 2

Si el perímetro es 60 m, ¿cuáles son las dimensiones del techo del estacionamiento?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información se aprecia en la figura?

  R: El techo del estacionamiento es un rectángulo.
- ¿Qué debes encontrar?

  R: Las dimensiones del techo del estacionamiento.

2. Crea un plan

- Simboliza, con una variable, uno de los lados del rectángulo. Después, encuentra una ecuación que relacione las dimensiones del rectángulo con su perímetro y resuélvela.

3. Ejecuta el plan

- Simboliza con x el ancho del rectángulo.
- El largo tiene 3 m más que el doble del ancho; es decir que el ancho es $2x + 3$.
- El perímetro del rectángulo es la suma de sus cuatro lados.

$$x + 2x + 3 + x + 2x + 3 = 60$$

Reduciendo términos semejantes se tiene:

$$6x + 6 = 60$$

$$6x = 60 - 6$$

$$x = \frac{54}{6} = 9$$

El ancho del rectángulo es 9 m y el largo es $2x + 3$; entonces:

$$2 \cdot 9 + 3 = 21$$

R: El estacionamiento mide 9 m de ancho y 21 m de largo.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que si el perímetro es 48 m, el largo será 17 m.

Aplica la estrategia

1. En la Figura 3 se muestra el símbolo de una empresa de turismo.

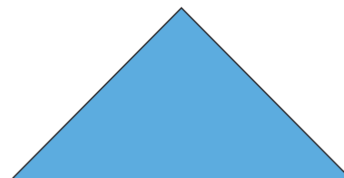


Figura 3

Si tiene forma de triángulo isósceles, su base mide 1 cm más que el doble de uno de sus lados y su perímetro es 13 cm, ¿cuánto mide cada uno de los lados congruentes?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. El perímetro de un hexágono regular es de 7 m. ¿Cuál es la longitud de cada lado?
3. El perímetro de un triángulo isósceles es 40 cm. Si la longitud de la base es 16 cm, ¿cuál es la medida de cada uno de los dos lados congruentes?
4. La edad del tío de Felipe hoy es el triple de la de su sobrino. Si dentro de quince años será el doble, ¿cuál es la edad actual de cada uno?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 4 y después resuélvelo..

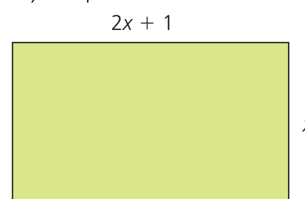
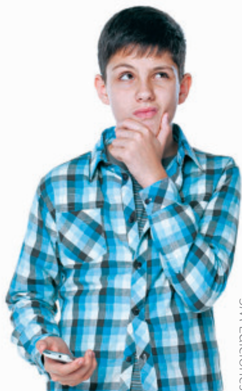


Figura 4

14 Inecuaciones de primer grado en Q con una incógnita

Explora

La suma de tres números enteros consecutivos es menor que 33.



- ¿Cuál es el mayor número entero que puede corresponder al menor de los tres números?

Si se considera x como el menor de estos números, el enunciado del problema se puede expresar mediante una **inecuación de primer grado con una incógnita**.

Número menor → $x + (x + 1) + (x + 2) < 33$ (Número intermedio: $(x+1)$; Número mayor: $(x+2)$)

El proceso de resolución de esta inecuación es:

$x + (x + 1) + (x + 2) < 33$

$3x + 3 < 33$ ← Se reducen términos semejantes.

$3x < 30$ ← Se aplican las propiedades de las desigualdades.

$x < 10$ ← Se despeja la incógnita.

El resultado anterior significa que el menor de los tres números debe ser menor que 10 y que el mayor número entero que cumple esta condición es 9.

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es toda inecuación que pueda escribirse de la forma $ax + b < 0$, con a y b como números reales y $a \neq 0$.

Si el signo $<$ se reemplaza por $\leq$, $>$ o $\geq$, la expresión resultante también se denomina inecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 1

Expresiones como las siguientes son inecuaciones que pueden llevarse a la forma general de una inecuación de primer grado con una incógnita.

$4x + 5 < -3 \qquad \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} > 15 \qquad -11x - 19 \leq -\frac{1}{4}$

Si en las inecuaciones a, b y c son números reales se aplican estas propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Ten en cuenta

Una **semirrecta** está formada por todos los números de la recta mayores o menores que uno de ellos; este puede estar incluido o no.

Según esto, hay dos tipos de semirrectas:

- ***Abierta:*** $(2, +\infty) \Leftrightarrow x > 2$

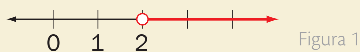


Figura 1

- ***Cerrada:*** $(-\infty, 3] \Leftrightarrow x \leq 3$

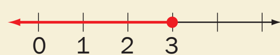


Figura 2

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la inecuación $5(x - 3) > -9$.

Solución:

$5(x - 3) > -9$

$5x - 15 > -9$ Se eliminan signos de agrupación.

$5x - 15 + 15 > -9 + 15$ Se suma 15 a cada miembro de la inecuación.

$5x > 6$ Se reducen términos semejantes.

$\frac{1}{5} \cdot 5x > \frac{1}{5} \cdot 6$ Se multiplica por $\frac{1}{5}$ cada miembro de la inecuación.

$x > \frac{6}{5}$

Existen infinidad de valores que satisfacen esta inecuación. En este caso, la solución es el conjunto de números reales mayores que $\frac{6}{5}$. (Figura 3)

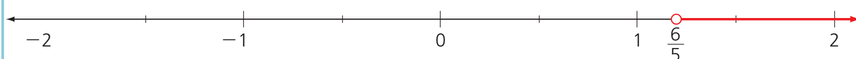


Figura 3



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt08

Encuentra aquí más información acerca de las inecuaciones de primer grado.

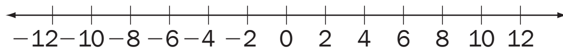
Destreza con criterios de desempeño: Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q de manera algebraica.

Desarrolla tus destrezas

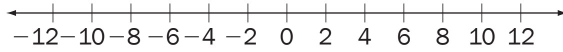
Ejercitación

2 Representa en la recta numérica al conjunto de números reales que satisfacen cada inecuación.

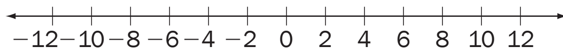
a. $x - 1 < 9$



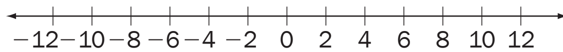
b. $2x \geq 15$



c. $0 \geq x + 7$



d. $-8x + 3 > 19$



Comunicación

3 Escribe cada inecuación de la forma $ax + b < 0$, con a y b como números reales.

a. $7x - 6 < -5x + 1$

b. $1 - 4x > 2 - x$

c. $\frac{7x - 4}{3} \geq 2$

d. $\frac{2x + 3}{5} < -4$

e. $\frac{-2x + 1}{2} + 1 \geq 3$

Ejercitación

4 Resuelve la inecuación $5x - 18 < 12 - 3x$, efectuando las transformaciones que se indican.

a. Suma $3x$ en ambos miembros de la inecuación.

b. Suma 18 en los dos miembros de la inecuación.

c. Divide entre 8 a ambos lados de la inecuación.

d. Representa en una recta numérica los valores de x que satisfacen la inecuación.

5 Realiza lo que se indica para hallar la solución de la inecuación $5x + 10 < 2x - 5$.

a. Suma $(-2x)$ a los dos miembros de la inecuación.

b. Suma (-10) a los dos miembros de la inecuación.

c. Realiza las operaciones.

d. Divide entre 3 a los dos miembros de la inecuación.

e. ¿Cuál es la solución?

Razonamiento

6 Encuentra y representa en una recta numérica los valores de x que satisfacen cada inecuación dada.

a. $2x - 5 < 7x - 3$

b. $3 - 2x > -25 - 4x$

c. $2x - 7 \leq 12x - 5$

d. $9x - 6 \geq -18x - 1$

e. $-(3x - 7) < 5x - (3 - x)$

f. $-4x > 5x - (2 - 5x)$

g. $\frac{-3x + 1}{6} < \frac{1}{3}$

h. $\frac{3x - 5}{4} \geq 3$

i. $\frac{-5x + 1}{6} \leq \frac{2}{3}$

j. $\frac{7x}{2} + \frac{3}{5} \leq \frac{1}{5}$

Razonamiento

7 Escribe dos intervalos que satisfagan las dos condiciones dadas en cada caso.

a. $x - 5 < 10;\ x + 3 > 2$

b. $-x < 0;\ x - 3 < 5$

c. $\frac{x}{2} \leq 9;\ \frac{-x}{3} - 1 < 4$

d. $\frac{-2x + 1}{2} + 1 \geq 3;\ 0 < -x$

Resolución de problemas



8 Supon que estas dos balanzas están equilibradas.

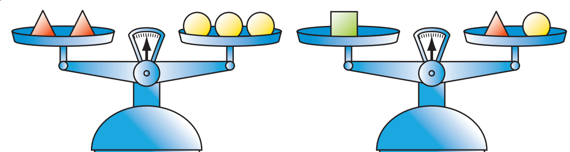


Figura 4

a. ¿Cuántas bolas equilibran esta tercera balanza?

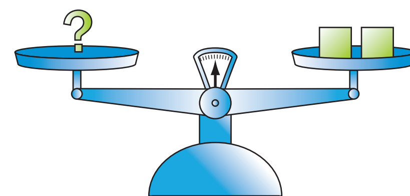


Figura 5

b. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la derecha?

c. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la izquierda?

15 Problemas con inecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

Pedro es cuatro años mayor que Juan. Hace 20 años, Pedro tenía por lo menos el doble de la edad de Juan.



- ¿Cuál es la máxima edad que puede tener Juan ahora?

Para resolver el problema, se puede seguir un proceso similar al empleado para solucionar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1. Comprende

Si x representa la edad actual de Pedro, entonces $x - 4$ corresponde a la edad de Juan.

2. Planea

La relación entre las dos edades hace 20 años se puede expresar como sigue:

$(x - 20) \geq 2(x - 24)$

En este caso, el signo $\geq$ expresa que, hace 20 años, la edad de Pedro era mayor o igual que la edad de Juan.

3. Resuelve

El proceso de resolución es este:

$(x - 20) \geq 2(x - 24)$

$x - 20 \geq 2x - 48$ ← Se eliminan los paréntesis.

$48 - 20 \geq 2x - x$ ← Se aplican las propiedades de las desigualdades.

$28 \geq x$ ← Se despeja la incógnita.

La edad de Juan es, máximo, 24 años.

4. Revisa

Al reemplazar el valor de x en la expresión original, se cumple la desigualdad, así:

$(28 - 20) \geq 2(28 - 24)$

$8 \geq 8$



Pasajeros en una terminal de transporte aéreo.

Actividad resuelta

Comunicación

1. En cierta aerolínea, el equipaje de los pasajeros no debe sobrepasar los 20 kg de peso. Si un pasajero lleva tres maletas que pesan lo mismo, ¿cuál debe ser el peso máximo de cada una, para no sobrepasar el límite de la aerolínea?

Solución:

Comprende

Los datos del problema son:

Expresión verbal	Expresión algebraica
Peso de cada maleta	x
Peso de las tres maletas	$3x$

Tabla 1

Planea

Se plantea una desigualdad lineal, considerando que el peso de las tres maletas no debe superar los 20 kg. La desigualdad correspondiente es:

$3x \leq 20$

Resuelve

Su solución es: $x \leq \frac{20}{3}$

Por lo tanto, cada maleta debe pesar máximo $\frac{20}{3}$ kg $= 6\frac{2}{3}$ kg.

Revisa

Cualquier peso menor o igual que $6\frac{2}{3}$ kg satisface la inecuación.
Si $x = 5$, entonces $3(5) = 15 \leq 20$.

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe la inecuación que corresponde a cada situación.

a. La suma de dos números enteros consecutivos es menor que 37.

b. La diferencia del triple de un número y la mitad del número es menor que 24.

c. La tercera parte de un número aumentada en 5 es mayor que la mitad del número.

d. Dentro de siete años la edad de José será menor que el doble de su edad actual.

e. El perímetro de un triángulo equilátero con lado x es menor que 76.

3 Escribe la expresión verbal que puede estar representada en cada desigualdad.

a. $5x - 8 > 2x$

b. $6x - 1 < 3x + 2$

c. $x \leq 2x - 7$

d. $3x + 2 \geqslant 7$

e. $21a + 12 > 15$

f. $18 + x < 605$

g. $13n - 4 \leqslant 323$

h. $48a - 1 \geqslant 10$

Resolución de problemas



4 El doble de la edad de Juan aumentada en 7 es, como mínimo, 56 años.

a. ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado anterior?

$2x + 7 \geq 56$ | $2x + 7 > 56$
$2x + 7 \leq 56$ | $2x + 7 < 56$

b. ¿Cuál es la edad mínima que puede tener Juan?

5 Se sabe que la suma de tres enteros consecutivos no es menor que 63.

a. ¿Cuál es la inecuación relacionada con el enunciado?

$x + (x + 1) + (x + 2) > 63$

$x + (x + 1) + (x + 2) < 63$

$x + (x + 1) + (x + 2) \geq 63$

$x + (x + 1) + (x + 2) \leq 63$

b. ¿Cuáles son los tres menores números que cumplen la condición?

6 El resultado de multiplicar por 5 un número es menor que la mitad de dicho número aumentado en 40.

a. ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado?

$5x < \frac{x}{2} + 40$ | $5x > \frac{x}{2} + 40$
$5x \leq \frac{x}{2} + 40$ | $5x \geq \frac{x}{2} + 40$

b. ¿Cuál es el mayor número entero que cumple con las características dadas en el enunciado?

7 En el grado noveno se quiere formar un grupo de teatro con 28 estudiantes, de manera que el doble de niñas sea mayor que el triple de niños. ¿Cuál es el menor número de niñas que deben participar?



Luis Hernández

8 ¿Cuál es el menor número impar cuyo doble incrementado en cuatro es menor que tres veces el número disminuido en 12?

9 La base de un rectángulo mide el doble que su altura. Halla las medidas de dicho rectángulo para que su perímetro sea inferior a 36 cm.

10 Un ciclista puede pedalear a una velocidad de entre 10 y 30 km/h dependiendo de la pista. ¿Entre qué valores oscila la distancia recorrida, si pedalea durante 3,5 h?

11 El 55% de una dieta sana deben ser carbohidratos. Si el triple del porcentaje de proteínas aumentado en 10 no debe superar el porcentaje de carbohidratos, ¿cuál es el porcentaje de proteínas que debe tener la dieta?

12 Luz tiene menos de 25 años y es 3 años mayor que Ana. Escribe la inecuación que representa la edad de Ana.

13 Halla el menor número entero cuyo triple aumentado en 15 es mayor que 35.

Prueba Ser Estudiante



1. A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

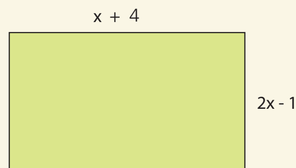
A. $7\,w\,x\,y^2$

B. $5\,w\,x\,y^2$

C. $35\,w^2\,x^2\,y^2$

D. $70\,w^3\,x\,y^2$

2. En el rectángulo de la figura, su área está dada por la expresión:



A. $6x^2 + 4x + 5$

B. $6x^2 + 5x - 4$

C. $6x^2 + 4x - 5$

D. $6x^2 - 5x + 4$

3. Sea el área de un rectángulo $1000a^3 - 1$, el producto de sus lados se expresa:

A. *(10a – 1)(100a2 + 10a + 1)*

B. *(10a + 1)(100a2 – 20a + 1)*

C. *(100a – 1)(100a + 1)*

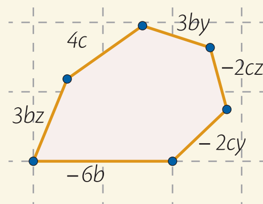
D. *(10a + 1)(100a2 – 10 a + 1)*

4. El área de una pared está dada por la expresión $25\,a^2b^4 - 121$, si a = 3 y b = 2, su largo y ancho son:

A. 19 y 41 **B.** 49 y 71

C. 22 y 73 **D.** 33 y 49

5. El perímetro simplificado de la figura es:



A. $(3b - 2c)(y + z - 2)$ **C.** $(2y + 3z)(y + z + 1)$

B. $(b - c)(3y - 2z + 1)$ **D.** $(2b + 3c)(2 + 2y + 3z)$

6. El producto de las edades de Natalia y Gabriela está dada por la expresión: $m^2 + 6mn - 4m^4 + 9y^2$, sabiendo que $m=1$ y $n=2$ sus edades son:

A. *14 y 4*

B. *2 y 6*

C. *19 y 11*

D. *3 y 11*

7. El trinomio $-4h - 5 + h^2$ corresponde a:

A. trinomio cuadrado perfecto

B. trinomio $x^2 + bx + c$

C. trinomio $ax^2 + bx + c$

D. trinomio cuadrado perfecto incompleto

8. Si el área de un rombo es $\left(\frac{g^2}{2} + \frac{7g}{2} + 6\right)cm^2$ y una de sus diagonales es (g + 4)cm, entonces la medida de su segunda diagonal es:

A. $(g + 3)$

B. $\left(\frac{g}{2} + 3\right)$

C. $\left(\frac{g}{2} - 4\right)$

D. $(g + 3)$

9. Si el área de un cuadrado es, $1 - \frac{2f}{3} + \frac{f^2}{9}$ entonces el lado es:

A. $1 - \frac{f}{9}$

B. $\frac{f}{9} - 1$

C. $\frac{1}{3} + f$

D. $1 - \frac{f}{3}$

Indicadores de logro:

- Reconoce, calcula e identifica factores de expresiones algebraicas.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R

10. El producto de los costos de dos libros está dado por la expresión *64x2 – 25 y2, si x=2 y y=1*, entones los libros cuestan:

A. \$ 11 *y* \$ 15

B. \$ 21 *y* \$ 11

C. \$ 8 *y* \$ 11

D. \$ 16 *y* \$ 5

11. El número que aumentado en $\frac{7}{2}$ es igual al triple del número:

A. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{7}{8}$

12. El producto de un número por 7 es igual al número aumentado en 18, el número es:

A. 6

B. 5

C. 3

D. 4

13. El cociente de la cuarta parte de un número y la octava parte del número es igual al producto del número por $\frac{1}{6}$, el número es:

A. 12

B. 8

C. 6

D. 4

14. José tiene 2 años más que Isaac y la suma de las dos edades no puede ser mayor a 18. La inecuación que representa el enunciado es:

A. $x + 18 > 2$

B. $2x - 2 < 18$

C. $x + 1 \leq 9$

D. $2x - x \geq 9$

15. La edad de Angel disminuida en su tercera parte es como máximo 30 años. La inecuación que representa al enunciado es:

A. $x - \frac{x}{3} < 30$

B. $x - \frac{x}{3} \leq 30$

C. $x - \frac{x}{3} > 30$

D. $x - \frac{x}{3} \geq 30$

16. El resultado de la inecuación $4(x + 1) - 2(x - 2) < x + 5$ es:

A. $x < 3$

B. $x > 3$

C. $x < 3$

D. $x > 3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Hablemos de consumo y responsabilidad

Por naturaleza los seres humanos nos valemos de diversos "elementos" para poder garantizar nuestra vida. Esto nos ha llevado a adoptar cada vez más prácticas de consumo de distintos bienes y servicios.


SM Ediciones

Según el diccionario, *consumir* es: usar, disfrutar o servirse de cierta cosa, material o inmaterial, en especial algo que se gasta o por lo que se paga dinero.


SM Ediciones

Actualmente, nuestra sociedad enfrenta hábitos de consumo que día a día han ido desgastando el planeta y han disminuido los diferentes recursos que él nos aporta. Esta es una de las razones por las que actualmente en el mundo se difunde una estrategia de "Consumo responsable".

Consumo responsable

Es la elección de productos y servicios no solo con base en su calidad y precio, sino también por su impacto ambiental y social, además de la conducta de las empresas que elaboran dichos productos u ofrecen tales servicios.

Este consumo es defendido por muchas organizaciones ecológicas, sociales y políticas que promueven el cambio de los hábitos de consumo que se ajusten más a las necesidades reales y privilegiando en el mercado aquellas opciones que favorezcan la conservación del medio ambiente y la igualdad social.


SM Ediciones

Desarrolla tus destrezas

Trabajo en grupo

Planeación económica y financiera

1. Escriban un párrafo en el que comparen los conceptos de "consumismo" y "consumo responsable". Busquen información si hace falta.
2. Pidan a sus padres un recibo del servicio de agua de tu casa. Analicen el consumo en los últimos seis meses y escriban en un párrafo el comportamiento de este consumo en tu casa.
3. Revisen en la misma factura el cobro por el servicio de agua potable analicen los diferentes valores del consumo en su hogar.
4. Respondan la siguiente pregunta:
   ¿Creen que en su hogar se hace un consumo responsable del agua?


SM Ediciones

Algunos de los aspectos que se deben tener en cuenta en el consumo responsable son:

- Considerar el impacto ambiental de los productos que compramos.
- Saber de los procesos de producción, transporte, distribución y residuos que dejan los productos que consumimos.
- Determinar la huella ecológica que dejan determinados estilos de vida y consumo.
- Reconocer y valorar empresas, productos y servicios, que respeten el medio ambiente y los derechos humanos.
- Asegurar la calidad de lo que se compra.


SM Ediciones

¿Qué es el CONSUMO ÉTICO?

- Es un consumo en el que se introducen los valores como una variante importante a la hora de consumir; en este se valoran las opciones más justas y solidarias, no pensando únicamente en el beneficio personal.
- Este tipo de consumo implica dos aspectos fundamentales: primero, la formación de un pensamiento crítico frente a la realidad que nos rodea, cuestionándonos qué hay detrás de cada cosa que consumimos y cuáles son sus consecuencias y segundo, la reducción de los niveles de consumo propio.

¿Qué es el CONSUMO ECOLÓGICO?

El consumo ecológico tiene en cuenta las tres "erres" del movimiento ecologista:

- **R**educir
- **R**eutilizar
- **R**eciclar

¿Qué es el CONSUMO SOLIDARIO?

Es aquel en el que se tienen en cuenta las condiciones laborales en las que se ha elaborado un producto. Se trata de pagar el precio justo por un trabajo, eliminar la discriminación y potenciar alternativas sociales y de integración.


SM Ediciones

Pregunta tipo Saber


SM Ediciones

Para una familia el metro cúbico de agua cuesta $ 0.31 aproximadamente. Para tomar el costo del servicio de agua potable se debe sumar al consumo un cargo fijo de $ 14 un cargo fijo de alcantarillado de $ 2.75, administración $ 2.10 y el costo de alcantarillado por cada metro cúbico que es de $ 0.15. Teniendo en cuenta esta información, si una familia consume 21 metros cúbicos de agua deberá pagar una factura por:

A. Aproximadamente $ 10

B. $ 5

C. $ 12

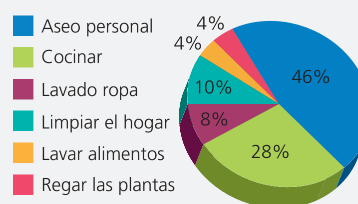
D. Más de $ 13

Administración de recursos

5 Lee la siguiente información. Luego, analiza la gráfica y responde:

Una persona consume en promedio 3,8 metros cúbicos de agua al mes. Es decir, que en una familia de 4 personas, el consumo promedio mensual debe ser aproximadamente de 15,4 metros cúbicos de agua. 15,4 metros cúbicos es equivalente a 15.400 litros de agua.

La gráfica circular de la derecha, describe el porcentaje de consumo de agua de una persona:



6 Determina el número de litros de agua, promedio, que se emplean en cada tipo de uso que se le da en el hogar a este elemento.

7 Escribe un párrafo en el cual plantees tu posición frente al uso responsable y al ahorro del agua.

Habilidades digitales

Elabora un mapa conceptual con Cmaptools

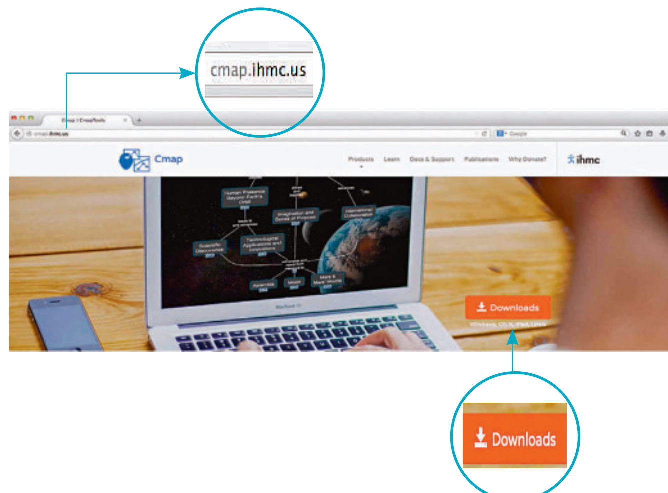
Buscar información confiable y organizarla como un mapa de conceptos, de forma fácil e intuitiva, es posible con la ayuda de Cmaptools. Este *software* gratuito sirve para construir mapas conceptuales claros y sencillos. En esta actividad aprenderás a elaborar un mapa conceptual con este programa.

1 Descarga el programa Cmaptools en su versión gratuita

a. Ingresa a http://cmap.ihmc.us/, da clic sobre el botón *Download*, regístrate y descarga el programa.

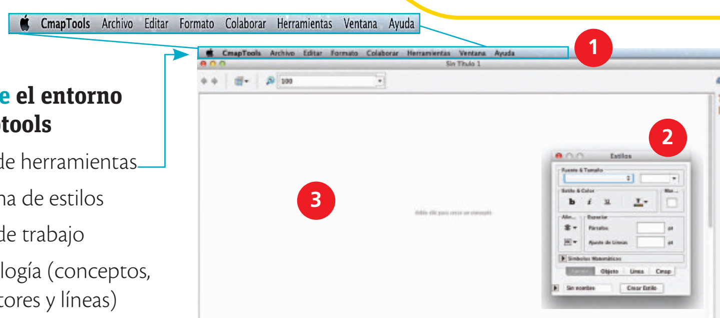
b. Abre Cmaptools desde tu computador CmapTools (si es la primera vez, diligencia el formulario y da clic en la opción "Aceptar").

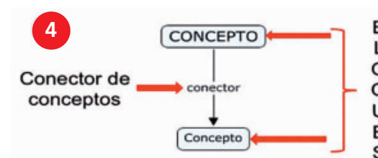
c. Oprime las teclas Ctrl + N para crear un nuevo Cmap.



2 Reconoce el entorno de Cmaptools

1. Barra de herramientas
2. Ventana de estilos
3. Zona de trabajo
4. Simbología (conceptos, conectores y líneas)





3 Crea un mapa conceptual

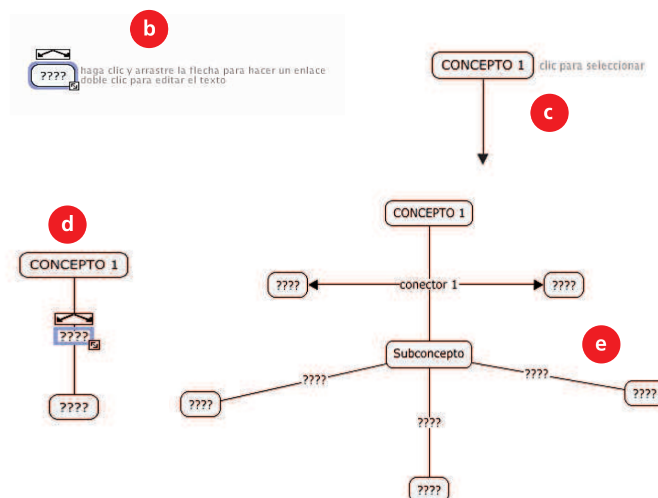
a. Realiza una búsqueda de información confiable en Internet sobre la factorización (textos, imágenes, videos, documentos).

b. Da doble clic sobre la zona de trabajo para crear un concepto.

c. Edita el bloque que aparezca como concepto principal, asignándole un título, por ejemplo: Ecuaciones de primer grado.

d. Da clic sobre el concepto creado y usa las flechas para "arrastrar" y generar un subconcepto. Edita tanto el conector como el nuevo bloque.

e. Repite el paso **anterior** cuantas veces requieras, hasta finalizar tu mapa conceptual.



4 **Edita** tu mapa conceptual

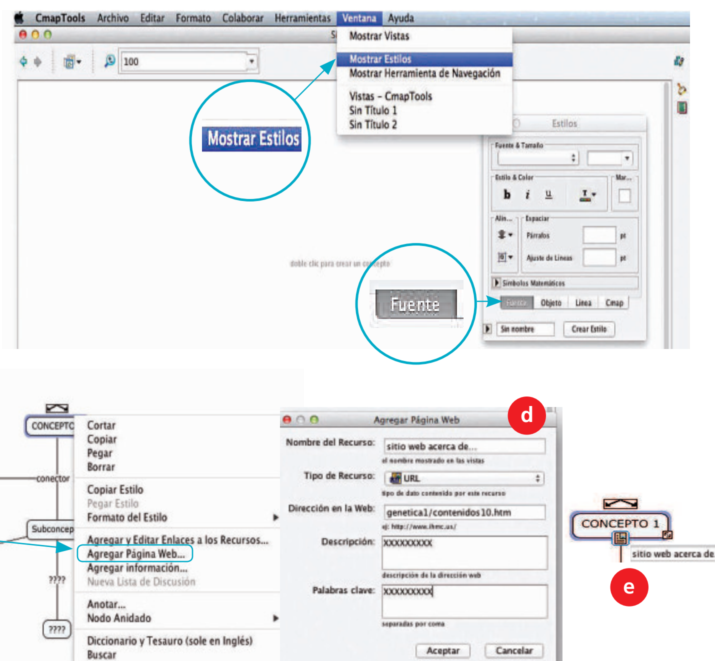
a. En la barra de herramientas, oprime el menú Ventana y selecciona la opción *Mostrar estilos*.

b. Usa la ventana emergente *Estilos*, da clic sobre la pestaña *Fuente* y edita el tipo y tamaño de la letra, escogiendo entre las posibilidades que aparecen.

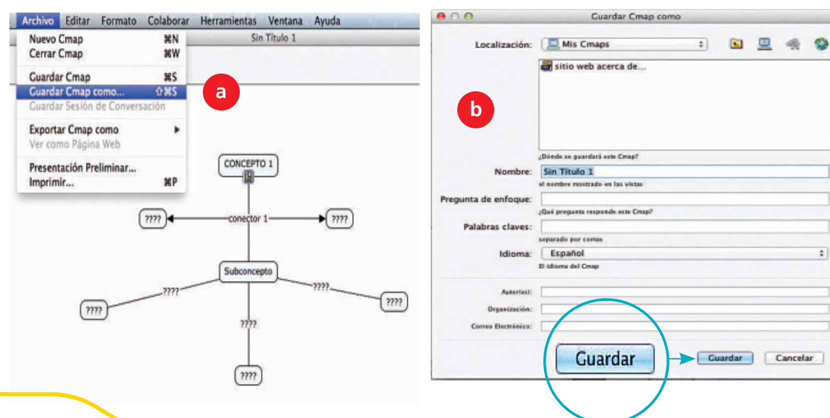
c. Selecciona un concepto y sobre él mismo da clic derecho con el ratón.

d. Escoge la opción *Agregar página web*. En la ventana emergente diligencia un nombre, una dirección electrónica, una pequeña descripción del sitio y palabras claves. Luego, da clic en *Aceptar*.

e. Comprueba que el nuevo recurso aparezca bajo el concepto y que el enlace funcione, dando clic sobre este.



Agregar Página Web...



5 **Guarda** tu mapa conceptual

a. En la barra de herramientas oprime el botón *Archivo* y selecciona la opción *Guardar Cmap como*.

b. Diligencia los datos solicitados y luego da clic sobre *Guardar*.

a

b

Guardar



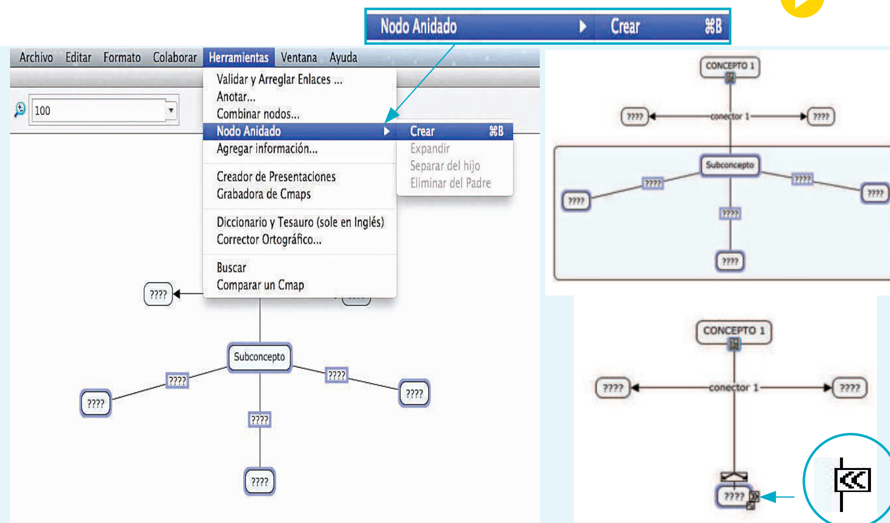
Aprende más

Mejora tu mapa conceptual. Agrupa conceptos con el modo "anidado".

a. Escoge un grupo de conceptos con el ratón.

b. En la barra de herramientas da clic sobre el menú *Herramientas*, luego escoge la opción *Nodo anidado* y luego *Crear*.

c. Expande y contrae el grupo de conceptos con el ícono.



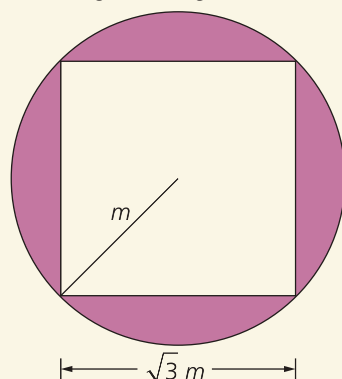
Evaluación de la Unidad



Factorización de polinomios por factor común

Modelación

1. Selecciona la expresión que determina el área sombreada de la siguiente figura.



a. $m\left(\pi m - 4\sqrt{3}\right)$ **b.** $m^2\,(\pi - 3)$

c. $m^2\left(\frac{4\pi - 3}{4}\right)$ **d.** $m^2\left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Factorización por agrupación de términos

Comunicación

2. Identifica los errores que se cometieron al factorizar el siguiente polinomio. Explica tu respuesta.

$$6x^3 + 4axy + 4ay^2 - 6xy^2 - 4ax^2 - 6x^2\,y$$
$$(6x^3 - 6x^2\,y - 6xy^2)\,(4axy + 4ay^2 - 4ax^2)$$
$$6x\,(x^2 - xy - y^2)\,4a\,(xy + y^2 - x^2)$$
$$2\,(3x + 2a)\,(x^2 - xy - y^2)$$

Diferencia de cuadrados perfectos

Razonamiento

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.

a. La diferencia de dos monomios siempre se puede factorizar como una diferencia de cuadrados perfectos. ( )

b. El binomio $4 - x^6$ es una diferencia de cuadrados perfectos. ( )

c. El polinomio $25a^4 + (3x^2 - 2)^6$ es una diferencia de cuadrados perfectos. ( )

d. La factorización del binomio $3 - x$ es igual a $\left(\sqrt{3} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{x}\right)$. ( )

e. En una diferencia de cuadrados perfectos, los términos deben estar elevados al cuadrado. ( )

Suma y diferencia de cubos perfectos

Resolución de problemas

4. Si el área de un terreno es $x^3y^6 - 512$, se puede afirmar que las dimensiones del terreno son:

$$A_{terreno} = x^3y^6 - 512$$

a. $(xy^3 + 8)(x^3y^3 - 8xy^3 + 64)$

b. $(xy^2 - 8)(x^2\,y^4 + 8xy^2 + 64)$

c. $(xy^2 - 8)(x^2\,y^4 - 8xy^2 + 64)$

d. $(xy^3 - 8)(x^3y^3 + 8xy^3 + 64)$

Factorización de expresiones de la forma $x^n \pm y^n$

Comunicación

5. Determina para cuáles polinomios $a - 2$ es un factor. Justifica tu respuesta.

a. $a^8 - 256$ b. $(3a + 5) + (a - 2)$

c. $a^2 - 4x + 4$ d. $ax - 2x + a - 2$

e. $a^7 + 128$ f. $a^2 - 4$

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Ejercitación

6. Completa las expresiones para que cada una de ellas corresponda a un trinomio cuadrado perfecto.

a. $64x^2 -$ ☐ $+ 4y^4$

b. ☐ $- 70mn + 25n^2$

c. $64r^2m^2 -$ ☐ $+ 49m^2n^2$

d. 36 ☐ $+ 30m^3c^2 +$ ☐ c^4

Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición o sustracción

Razonamiento

7. Relaciona los trinomios a los que se les debe adicionar o sustraer el mismo término.

a. $25x^4 - 11x^2 + 4$ 1. $ax^4 + 10x^2 + 9$

b. $9x^4 + 2x^2 + 4$ 2. $16x^4 + 77x^2 + 100$

c. $9x^4 + 31x^2 + 36$ 3. $x^4 - 3x^2 + 1$

d. $49x^4 + 67x^2 + 25$ 4. $4x^4 - 19x^2 + 9$

e. $x^4 + 22x^2 + 100$ 5. $9x^4 - 20x^2 + 25$

Indicadores de logro:

- Reconoce, calcula e identifica factores de expresiones algebraicas.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

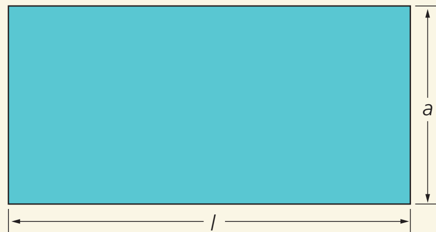
Resolución de problemas

8. Una persona deja caer un objeto desde una altura de 72 *m*. La expresión que relaciona la altura del objeto con respecto al tiempo, en segundos, es $x^2 - 14x + 72$. Determina el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo.

Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Resolución de problemas

9. El área de una plaqueta electrónica está dada por la expresión $3m^2 + 8m + 4$. Determina sus dimensiones.



Ecuaciones

Modelación

10. Relaciona cada enunciado con su representación matemática correspondiente.

a. El doble de un número más 3 es 12.	• $2x - 3 = 12$
b. Tres veces un número menos 2 es 12.	• $3x - 2x = 12$
c. Tres veces el doble de un número es 12.	• $2x + 3 = 12$
d. El doble de un número menos 3 es 12.	• $3(2x) = 12$
e. El triple de un número menos dos veces el número es 12.	• $3x - 2 = 12$

Modelación

11. Determina tres números pares consecutivos tales que la suma del primero más cinco veces el segundo sea cinco veces el tercero.

Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita

Razonamiento

12. Dos autos parten desde un mismo punto en direcciones opuestas. Si uno viaja a 85 km/h y el otro a 65 km/h, ¿cuánto tardarán en estar a una distancia de 300 km?

a. 2 minutos

b. 2,5 minutos

c. 2 horas

d. 2,5 horas

Comunicación

13. La nota máxima en una clase de matemáticas es 5,0. Las calificaciones de un estudiante de matemáticas son 4,8 y 3,6. ¿Cuál debe ser la nota del tercer examen para que la definitiva sea igual a 4,8? ¿Qué puedes concluir?

Ejercitación

14. Un empleado recibe $ 875 de salario mensual, luego de que le aplicaran deducciones del 12%. ¿Cuánto es el salario total del empleado?

a. $ 980 **b.** $ 960

c. $ 940 **d.** $ 920

Inecuaciones de primer grado con una sola incógnita

Razonamiento

15. Selecciona las afirmaciones que pueden representarse mediante una inecuación.

a. El número de jugadores de un equipo de fútbol.

b. El número máximo de hijos que puede tener una familia ecuatoriana

c. La temperatura máxima en el mes de julio es de 20 °C.

d. La capacidad de personas que pueden ir sentadas durante un viaje en un bus.

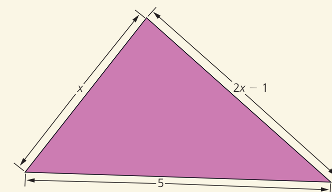
e. La velocidad máxima de un vehículo en la ciudad es de 80 km/h.

Modelación

16. Las escalas de temperatura Kelvin y Celsius están relacionadas por la expresión $K = C + 273$. ¿Qué valores de *C* corresponden a los valores de *K*, tales que $315 \leq K \leq 347$?

Modelación

17. La desigualdad triangular establece que la suma de las medidas de dos lados de un triángulo siempre será mayor que la medida del tercer lado. En el triángulo de la figura, ¿cuáles son los posibles valores de *x*?



4 Conjuntos y funciones lineales

BLOQUE
Geometría y medida
Álgebra y funciones

Uno de los principales objetivos de los matemáticos de diferentes épocas ha sido el estudio de la interdependencia de magnitudes variables. Estas investigaciones dieron origen al concepto de función, que hoy en día se ha constituido en uno de los más importantes en muchas ramas de la ciencia, la economía y la tecnología.

- Averigua acerca de las aplicaciones del concepto de función y propón algunos ejemplos.



Cultura del Buen Vivir

El compromiso

El compromiso es el valor que lleva a una persona a cumplir una promesa o a alcanzar un objetivo en el que se empeña de manera libre y perseverante.

- ¿Crees que es importante ser comprometido con tus proyectos escolares? Explica tu respuesta.

Aprenderás...

- Funciones. Propiedades
- Funciones lineales y afines. Aplicaciones
- Rectas paralelas y perpendiculares
- Conjuntos y operaciones

Resolución de problemas

Recursos digitales

1	LTIC	4	E
1	AI	1	V
10	LD	2	G

SM Ediciones

Habilidades lectoras

Funciones y servicios públicos

A cambio de recibir un servicio público, los habitantes de una ciudad deben pagar mensual una tarifa que depende básicamente del consumo realizado. Este sistema tarifario está segmentado según las necesidades de los usuarios y al inmueble donde el servicio es suministrado, bien sea de tipo residencial, comercial o industrial.

Por ejemplo, la tarifa del servicio de agua potable parte de un cargo fijo y un consumo básico. A esto se suma el consumo no básico, que varía de acuerdo al ritmo de su consumo en metros cúbicos.

No es muy complicado entender que el total se calcula haciendo la siguiente cuenta:

(Precio de un metro cúbico subsidiado) × (Cantidad de metros cúbicos consumidos) + cargo fijo subsidiado = total a pagar

Al escribir esta expresión en términos algebraicos, se obtiene la siguiente función lineal:

$$f(x) = 0{,}31x + 11{,}98$$

Eroski consumer. (consultado en Noviembre 2015). Recuperado de: http://revista.consumer.es/web/es/20070501/practico/consejo_del_mes/71515.php#rc-cabecera-container

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué factores influyen en el costo de una factura de un servicio público?

Argumenta

2. ¿Cómo se calcula el costo de la factura del acueducto? ¿Qué tipo de función permite hacer este cálculo?

Propón

3. Averigua si el costo de otros servicios públicos se puede modelar mediante funciones. De ser así, comparte un ejemplo con tus compañeros.

1 Conjuntos

Explora

El conjunto de los números primos está formado por aquellos números que solo tienen dos divisores: la unidad y el mismo.

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de números primos que son pares?

Si *A* es el conjunto de los números primos que son pares, entonces la característica común de los elementos de *A* es "ser número primo par".

Ya que 2 es un número par y primo, se puede afirmar que 2 **pertenece a** *A*. Para esta afirmación se utiliza la expresión "$2 \in A$".

El conjunto *A* solo tiene un elemento, pues 2 es el único número par que es primo. Por lo anterior, se puede decir que $4 \notin A$, pues es par pero no es primo. Esto se lee: "4 no pertenece a *A*".

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. Los objetos de la colección se denominan **elementos** y se dice que estos pertenecen a dicho conjunto.

Usualmente, los conjuntos se simbolizan mediante letras mayúsculas (como *A*, *B*, *C*…) y los elementos se denotan por medio de letras minúsculas (como *a*, *b*, *c*…).

Ejemplo 1

El conjunto *S* de los días de la semana tiene siete elementos: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo.

Se dice que cada uno de estos días pertenece al conjunto *S*.

Ejemplo 2

Sobre el conjunto *I* de los números naturales que son impares y menores que 15, se pueden establecer algunos enunciados como:

$3 \in I$, pues 3 es un número impar menor que 15.
$4 \notin I$, pues aunque es menor que 15 no es impar.
$17 \notin I$, pues aunque es impar no es menor que 15.
$15 \notin I$, pues aunque es impar no es menor que 15.
$11 \in I$, pues es a la vez impar y menor que 15.

1.1 Determinación de un conjunto

Un conjunto se determina de dos maneras: por extensión y por comprensión.

Un conjunto se determina **por extensión** cuando se hace un listado de todos los elementos que pertenecen a él, separados por comas y encerrados entre llaves {...}.

Un conjunto se determina **por comprensión** cuando se indica una propiedad común a todos los elementos del conjunto y solo a ellos. Si la propiedad que cumplen los elementos de un conjunto *A* es *P*, se elige un elemento *a* y se usa una expresión de la forma:

$$A = \{a \,/\, P(a)\}$$

la cual se lee: "*A* es el conjunto de todos los elementos *a* tales que cumplen la propiedad *P*".

Ejemplo 3

Para determinar por extensión el conjunto *V* de las vocales, se escribe:

$$V = \{\text{a, e, i, o, u}\}$$

Para determinar *V* por comprensión, se escribe:

$$V = \{x \,/\, x \text{ es vocal}\}$$



CULTURA del Buen Vivir

La justicia

Es un conjunto de valores esenciales sobre los cuales se debe basar una sociedad y el Estado. Esos valores son el respeto, la equidad, la igualdad y la libertad.

- Nombra un acto de justicia basado en la igualdad.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer conjuntos y sus características.

1.2 Representación de un conjunto

Los conjuntos se representan gráficamente mediante una curva cerrada a la que se le denomina **diagrama de Venn**, donde los elementos que pertenecen al conjunto se representan dentro de la curva.

A los elementos que no pertenecen al conjunto se les representa fuera de la curva.

Ten en cuenta

Los elementos de todos los conjuntos pertenecen a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**, denotado por *U*.

Los diagramas de Venn fueron creados por John Venn, matemático y filósofo inglés, quien con su uso provocó un gran revuelo en el mundo de la lógica formal.

La representación gráfica de un conjunto es muy útil para representar algunos hechos matemáticos y extraer información de forma rápida.

Ten en cuenta

La idea de la representación gráfica mediante un rectángulo se le debe a Lewis Carrol, matemático y autor de *Alicia en el país de las maravillas*.

Ejemplo 4

En la Figura 1 se observa la representación gráfica del conjunto *A*, cuyos elementos son los números naturales menores que 7, y del conjunto universal *U* de los números naturales.

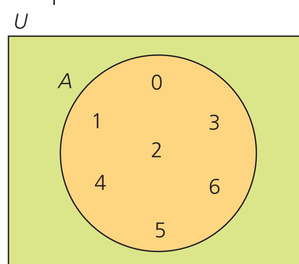


Figura 1

Ejemplo 5

En la Figura 2 se representan dentro del círculo los números pares menores que 10, y en su exterior los números impares menores que 10.

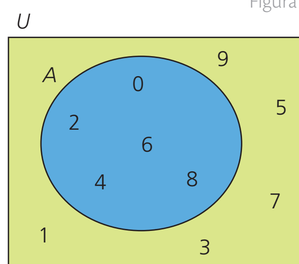


Figura 2

Ejemplo 6

A partir de la Figura 3 se puede determinar cada conjunto (*A*, *B* y *C*) por extensión, así: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ y $C = \{3, 6\}$.

De este diagrama de Venn se pueden deducir los siguientes hechos:

- 7 no pertenece a ninguno de los tres conjuntos.
- Los conjuntos *A* y *B* tienen la misma cantidad de elementos, pero no son iguales.
- El conjunto *C* tiene un elemento menos que el conjunto *B*.
- El número de elementos que hay en total entre los conjuntos *A*, *B* y *C* es seis.

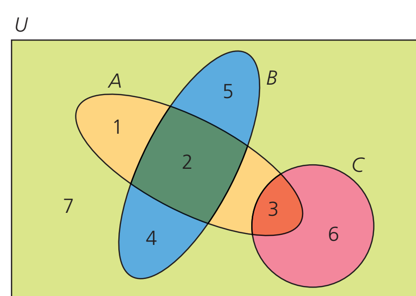


Figura 3

Ejemplo 7

En la Figura 4, el conjunto *M* corresponde a los números primos. Los tres puntos seguidos indican que la secuencia de esos números continúa.

Es importante observar que en el interior del conjunto *M* se ha representado un conjunto *N*, cuyo único elemento es 2. Esto indica que el único número primo par es precisamente 2.

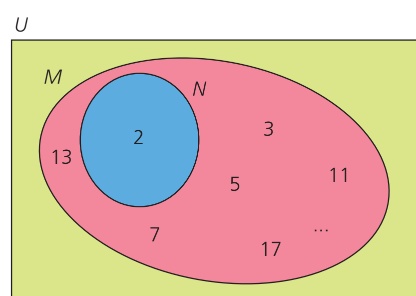


Figura 4

Los diagramas de Venn aportan mayor legibilidad a la comprensión de algunas relaciones que de otra manera resultan más difíciles de interpretar. Estos diagramas resultaron como la extensión de trabajos en el campo de la lógica formal que trascendieron por su simplicidad y valor práctico.

1 Conjuntos

Ten en cuenta

Todo conjunto **unitario** es finito, pues cuenta con un único elemento.

El conjunto **vacío** es finito, ya que tiene cero elementos.

1.3 Clases de conjuntos

Los conjuntos se pueden clasificar de acuerdo con el número de elementos que poseen en: finitos, infinitos, unitarios o vacíos.

- Un conjunto es **finito** cuando todos sus elementos pueden ser contados.
- Un conjunto es **infinito** cuando no es finito.
- Un conjunto **unitario** es aquel que tiene un único elemento.
- Un conjunto es **vacío** si carece de elementos.

Ejemplo 8

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$ representa el conjunto infinito de los números naturales.

$B = \{$m, u, r, c, i, e, l, a, g, o$\}$ es un conjunto finito que consta de diez elementos.

$C = \{$Luna$\}$ es un conjunto unitario, cuyo único elemento es la Luna.

$D = \{\}$ es un conjunto vacío porque no tiene elementos.

También se puede establecer qué tipo de conjunto se tiene sin necesidad de determinarlo por extensión.

Ejemplo 9

$A = \{x/x$ es un número impar$\}$ es un conjunto infinito.

$B = \{x/x$ es un divisor de 15$\}$ es un conjunto finito, pues tiene cuatro elementos: 1, 3, 5 y 15.

$C = \{x/x$ es un número primo par$\}$ es unitario, pues 2 es el único número que cumple esta condición.

$D = \{x/x$ es un número natural entre 3 y 4$\}$ es vacío, pues no hay ningún número natural mayor que 3 y menor que 4.

$E = \{x/x$ es un número impar divisible por 2$\}$ es un conjunto vacío porque no existe algún número que cumpla esta propiedad.

Ten en cuenta

Aunque pueda parecer que el conjunto de **números naturales** tiene más elementos que el conjunto de **números pares**, la verdad es que ambos conjuntos son infinitos.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Clasifica cada conjunto según sea infinito, finito, unitario o vacío.

a. $P = \{x/x$ es mes del año terrestre$\}$

b. $M = \{x/x$ es capital de Ecuador$\}$

c. $D = \{x/x$ es un ser humano con 200 años de edad$\}$

d. $T = \{x/x$ es un número natural par$\}$

e. $N = \{x/x$ es un día de la semana$\}$

f. $O = \{x/x$ es un número primo mayor que 20 y menor que 25$\}$

g. $Q = \{x/x$ es un número par menor que 2$\}$

Solución:

a. P es un conjunto finito que tiene doce elementos (los meses del año).

b. M es un conjunto unitario cuyo único elemento es Quito.

c. D es un conjunto vacío porque ningún ser humano vive 200 años.

d. T es un conjunto infinito, pues no existe un último número natural par.

e. N es un conjunto finito que tiene siete elementos (los días de la semana).

f. O es un conjunto unitario cuyo único elemento es 23.

g. Q es un conjunto unitario, pues 0 que es un número par, es menor que 2.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características .

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina cada conjunto por comprensión.

a. P = {azul, rojo, amarillo}

b. M = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

c. A = {5, 10, 15, 20, 25, 30...}

d. H = {}

e. Q = {1, 3, 5, 7, 9, 11...}

f. F = {meñique, índice, anular, medio, pulgar}

g. G = {5, 10, 15, 20, 25, 30}

h. D = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

i. R = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

3 Determina cada conjunto por extensión.

a. C = {x/x es una vocal del nombre Sara}

b. X = {x/x es un número natural menor que 15}

c. U = {x/x es un número natural comprendido entre 5 y 6}

d. A = {x/x es un número primo menor que 22}

e. H = {x/x es un medio de transporte marítimo}

f. Q = {x/x es un miembro de mi familia}

g. W = {x/x es un número natural mayor que 10 y menor que 25}

h. R = {x/x es una de las asignaturas que tomo este año}

4 Indica si cada conjunto es finito, infinito, unitario o vacío.

a. A = {2}

b. B = {x/x es un estudiante de mi curso}

c. C = {x/x es un ser humano que mide 5 metros}

d. D = {invierno, primavera, verano, otoño}

e. E = {x/x es un número natural mayor que 100}

f. F = {x/x es un continente}

g. G = {x/x es una cordillera de Ecuador}

h. H = {x/x es una estrella del sistema solar}

i. I = {x/x es un gato que ladra}

j. J = {x/x es un número natural mayor que 100}

k. K = {x/x es un número natural menor que 50}

Comunicación

5 Determina por extensión los conjuntos H, J y F representados en el diagrama de Venn de la Figura 5

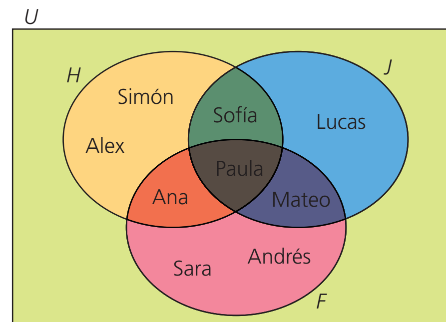


Figura 5

Razonamiento

6 Completa el diagrama de Venn de la Figura 6. Ten en cuenta las afirmaciones que se presentan a continuación y que U = {x/x es letra del alfabeto}.

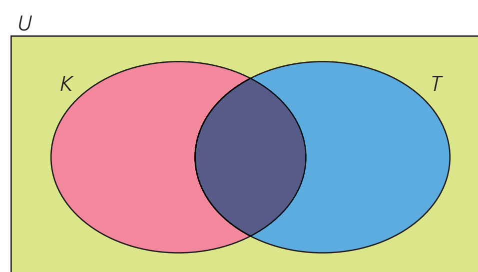


Figura 6

a. $p \in K$ y $p \in T$

b. $d \in K$ y $d \in T$

c. $a \in K$ y $a \notin T$

d. $e \in T$ y $e \in K$

e. $h \in T$ y $h \notin K$

f. $m \in K$ y $m \notin T$

g. $w \in T$ y $w \notin K$

h. $r \in K$ y $r \notin T$

i. $x \in T$ y $x \notin K$

j. $s \notin K$ y $s \notin T$

Resolución de problemas



7 Lee y resuelve.

El diagrama de Venn de la Figura 7 representa los integrantes de noveno grado que forman parte de los equipos de voleibol (V), baloncesto (B) y atletismo (A) del colegio. Escribe cada conjunto por extensión.

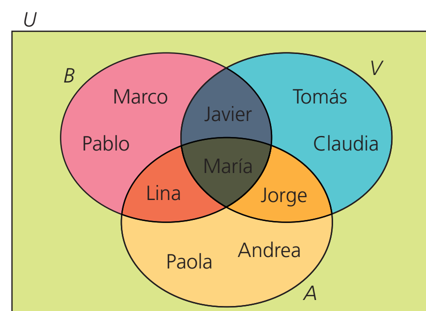


Figura 7

2 Relaciones entre conjuntos

Explora

Sean los conjuntos:

$P = \{1, 2, 3\}$

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$V = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

- ¿Qué relación existe entre los elementos de P con respecto a los elementos de Z y entre los elementos de V con respecto a los de Z?

Ten en cuenta

Para definir las relaciones de contenencia e igualdad entre conjuntos se utilizan los siguientes símbolos.

Contenencia

$A \subseteq B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

Igualdad

$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

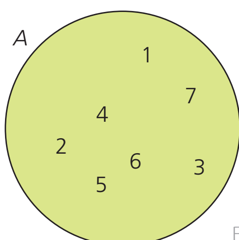


Figura 1

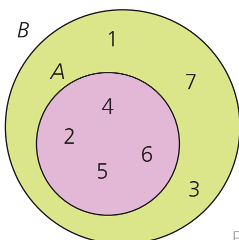


Figura 2

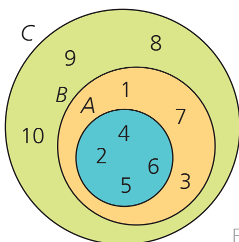


Figura 3

2.1 Relaciones de contenencia e igualdad

Al comparar los conjuntos $P = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $V = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, se puede afirmar que:

- Todos los elementos de P pertenecen al conjunto Z; entonces, se dice que el conjunto P es subconjunto de V (o que P está contenido en V).
- Como los elementos 0 y 8 pertenecen a V pero no a Z, se puede afirmar que V no está contenido en Z (o que no es subconjunto de Z).

Sean A y B dos conjuntos, se dice que **A está contenido en B** (o que A es **subconjunto de B**) si cada elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B. Esta relación se simboliza con $A \subseteq B$.

Ejemplo 1

El conjunto de los números pares es un subconjunto de los números naturales, porque todo número par es natural.

De otra parte, el conjunto de los números pares no es un subconjunto de los números primos, pues por ejemplo, 4 es un número par pero no es primo.

La **contenencia** de conjuntos satisface algunas propiedades:

- **Propiedad reflexiva**. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

  En la Figura 1 es evidente que cada elemento de A es elemento del mismo conjunto A.
- **Propiedad antisimétrica**. Si A y B son dos conjuntos diferentes y A está contenido en B, entonces B no puede estar contenido en A.

  En la Figura 2 se observa que todo elemento de A es elemento de B, pero existen elementos de B que no son elementos de A; es decir, A está contenido en B, pero B no está contenido en A.
- **Propiedad transitiva**. Si un conjunto A está contenido en un conjunto B y, a su vez, B está contenido en C, entonces A está contenido en C.

  En la Figura 3 se ve que cada elemento de A es elemento de B y de C al mismo tiempo, así que A está contenido en B y en C.

Dos conjuntos **A y B son iguales** si tienen los mismos elementos. Esta relación se denota por $A = B$.

Ejemplo 2

Dados los conjuntos $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $C = \{3, 4, 7, 8\}$, se puede establecer que $A = B$ porque los dos conjuntos tienen los mismos elementos, mientras que $C \neq A$ (C es diferente de A) y $C \neq B$ (C es diferente de B).

2.2 Conjuntos disyuntos

Dos conjuntos A y B son **disyuntos** si no tienen elementos en común.

Ejemplo 3

Entre los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ no hay elementos comunes, por lo tanto, A y B son disyuntos.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características .

Ejemplo 4

El conjunto $P = \{x/x$ es un número natural par$\}$ y el conjunto $M = \{x/x$ es un número natural impar$\}$ son disyuntos, pues no existe un número natural que a la vez sea par e impar.

Para representar dos conjuntos disyuntos se usan dos líneas curvas cerradas independientes sin ningún elemento en común, tal como se sugiere en la Figura 4.

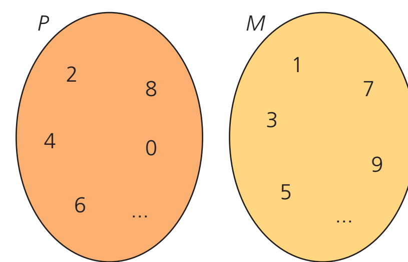


Figura 4

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Decide si cada par de conjuntos son disyuntos.

a. *A* es el conjunto de los números primos y *B* es el de los números pares

b. *M* es el conjunto de números impares y *N* es el conjunto de múltiplos de 4

c. *G* es el conjunto de múltiplos de 7 y *Q* es el conjunto de sus divisores

Solución:

a. *A* y *B* no son disyuntos, pues 2 es un número par y primo a la vez

b. *M* y *N* son disyuntos, pues todos los múltiplos de 4 son pares

c. *G* y *Q* no son disyuntos, pues 7 es múltiplo y divisor de 7 al mismo tiempo

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Observa la Figura 5 e indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.

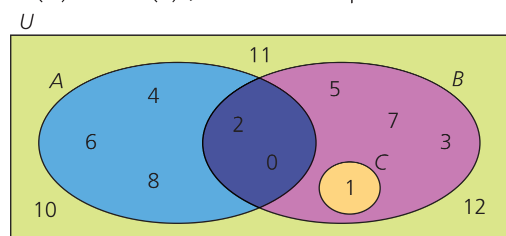


Figura 5

a. $0 \in A$ ( )

b. $B \in U$ ( )

c. $B \subseteq C$ ( )

d. $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ ( )

e. $U = \{10, 11, 12\}$ ( )

f. Los conjuntos *A* y *C* son disyuntos ( )

g. El conjunto *C* es unitario ( )

3 Escribe con símbolos la relación que hay entre los conjuntos *A* y *B* en cada caso.

a. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

b. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c. $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{2\}$

d. $A = \{10, 11, 12, 13\}$ y $B = \{12, 13\}$

e. $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{4\}$

f. $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, d, e\}$

Comunicación

4 Indica si cada uno de los siguientes pares de conjuntos son disyuntos. Explica cada respuesta.

a. *V* es el conjunto de las vocales del alfabeto castellano y *C* el de consonantes del mismo idioma.

b. *I* es el conjunto de insectos y *M* el conjunto de mamíferos.

c. *E* es el conjunto de países europeos y *A* el conjunto de países de América.

d. *P* es el conjunto de países de habla portuguesa y *A* el conjunto de países de América.

e. *Y* es el conjunto de números primos y *Z* el de números naturales entre 14 y 16.

f. *R* es el conjunto de divisores de 11 y *S* el de divisores de 5.

Resolución de problemas



5 Da un ejemplo de un conjunto que sea disyunto con cada uno de los conjuntos dados. Ten en cuenta el conjunto universal en cada caso.

a. Múltiplos del número 5

b. Divisores del número 10

c. Números primos terminados en 1

d. Números impares menores que 15

e. Números pares mayores que 2 pero menores que 50

f. Números pares primos

3 Operaciones entre conjuntos

Explora

Represente en un diagrama de Venn los conjuntos $A = \{h, e, l, n, a\}$ y $B = \{a, m, l, i\}$.

- ¿Dónde se ubican los elementos comunes de dichos conjuntos?

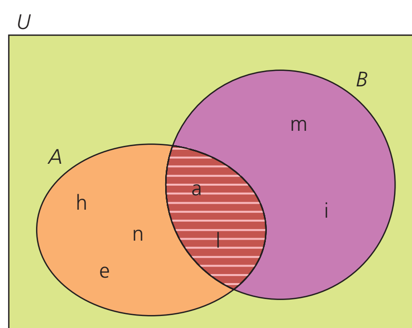
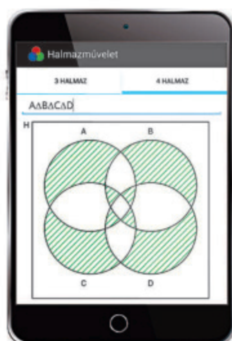


Figura 1

App

Operaciones entre conjuntos

Abre la aplicación *Set operations* y observa la representación gráfica de diversas operaciones entre conjuntos.



3.1 Intersección de conjuntos

En la Figura 1 se muestra la representación de los conjuntos A y B en un diagrama de Venn. Los elementos en común de estos conjuntos se encuentran en la intersección de los conjuntos (región sombreada).

A la intersección de $A = \{h, e, l, n, a\}$ y $B = \{a, m, l, i\}$ pertenecen los elementos que están en A y en B a la vez; esto es, a y l.

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes entre A y B. La intersección se nota como $A \cap B$ y se define como: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$.

Por lo tanto, $A \cap B = \{a, l\}$.

Ejemplo 1

El conjunto M de todos los múltiplos de 2 y el conjunto N de todos los divisores de 5 son disyuntos y, por lo tanto, su intersección es vacía.

$M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10...\}$ y $N = \{1, 5\}$ M = intersección $N = \{\ \}$

La intersección de conjuntos cumple con las siguientes **propiedades**:

- La intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. En la Figura 2 se observa que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y es claro que $A \cap A = A$.

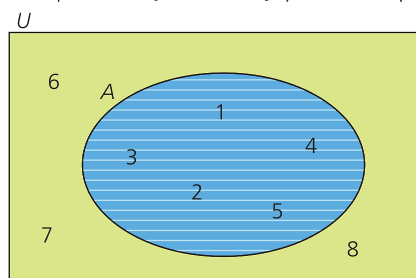


Figura 2

- La intersección de dos conjuntos es subconjunto de cada uno de estos.

  En la Figura 3 se tiene que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; entonces, el conjunto intersección $A \cap B = \{4, 5\}$ está contenido tanto en A como en B.

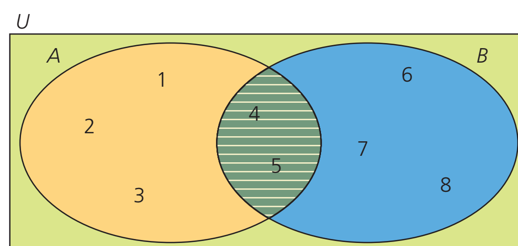


Figura 3

- La intersección de un conjunto con un subconjunto suyo, es el mismo subconjunto.

  En la Figura 4, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $A \cap B = \{1, 2, 3\} = A$.

- La intersección de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de los conjuntos B y A.

- La intersección de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío, pues al carecer este último de elementos, no puede tener ninguno en común con otros conjuntos.

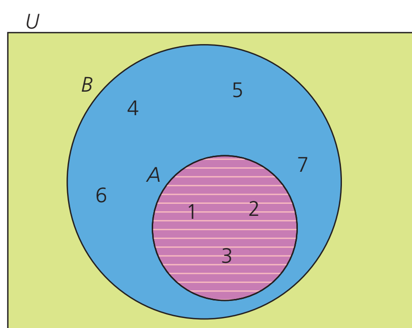


Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.

3.2 Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A y que pertenecen al conjunto B. La unión se nota con $A \cup B$ y se define como:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 2

Para hallar la unión del conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ con el conjunto $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, se ponen juntos los elementos de A y C, y cada elemento común se escribe una sola vez.

Por lo tanto, $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$, como representa la región sombreada en la Figura 5.

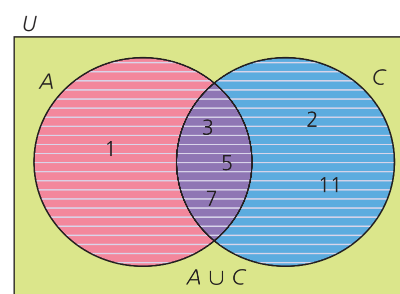


Figura 5

Ejemplo 3

La unión de los conjuntos $A = \{x/x$ es un número natural par$\}$ y $B = \{x/x$ es un número natural impar$\}$, es el conjunto de todos los números naturales.

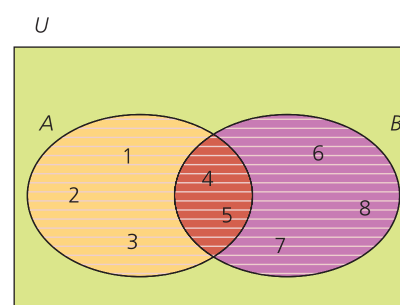


Figura 6

Al igual que la intersección, la unión satisface algunas **propiedades**:

- La unión del conjunto A consigo mismo, es el propio conjunto A.
- Tanto A como B son subconjuntos de $A \cup B$.

  Según la Figura 6, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Cada elemento de A pertenece también al conjunto $A \cup B$, así que A está contenido en $A \cup B$. De forma análoga, B es un subconjunto de $A \cup B$.
- La unión de un conjunto A con un conjunto B al que contiene, es el mismo conjunto A.

  En la Figura 7 se observan los conjuntos $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ y $B = \{2, 4, 9\}$; entonces $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\} = A$.
- La unión de los conjuntos A y B es igual a la unión de los conjuntos B y A.
- La unión de un conjunto A con el conjunto vacío, es el mismo conjunto A.

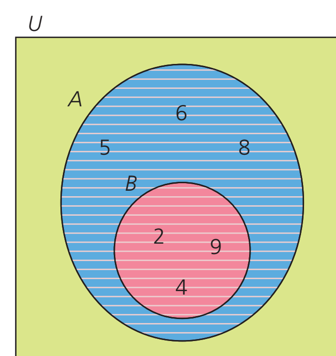


Figura 7

3.3 Complemento de un conjunto

Sea A un subconjunto del conjunto universal U, el conjunto de elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A se denomina **complemento** de A; este se nota como A' y se define como:

$$A' = \{x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo 4

Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $A = \{2, 4, 6\}$, los elementos de U que no pertenecen a A están en el complemento de A. Entonces, $A' = \{1, 3, 5, 7\}$ (su representación se muestra en la Figura 8).

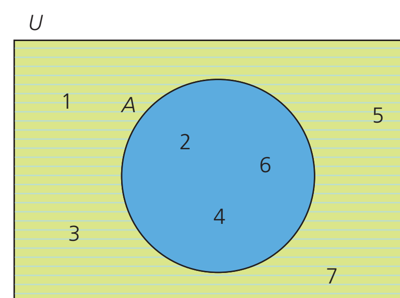


Figura 8

Algunas **propiedades** del complemento son:

- El complemento del complemento de un conjunto A es el propio conjunto A.
- La unión de un conjunto con su complemento es el conjunto universal.
- Un conjunto y su complemento son disyuntos.
- El complemento de A está contenido en el complemento de cualquier subconjunto de A.

3 Operaciones entre conjuntos

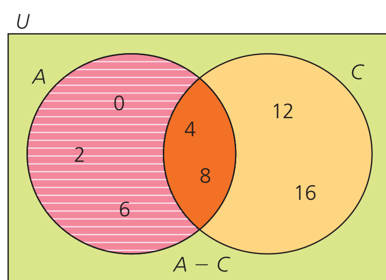


Figura 1

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/6smt01

Utiliza las operaciones entre conjuntos para resolver problemas.

3.4 Diferencia de conjuntos

A la **diferencia de dos conjuntos** A y B pertenecen todos los elementos de A que no pertenecen a B. Esta operación se nota con $A - B$ y se define simbólicamente como:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 5

Si $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{4, 8, 12, 16\}$, los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a C conforman el conjunto diferencia

$A - C = \{0, 2, 6\}$, que se representa en la región sombreada de la Figura 1

3.5 Diferencia simétrica

A la **diferencia simétrica** entre un conjunto A y un conjunto B pertenecen todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B, pero no a ambos simultáneamente. Se nota como $A \triangle B$ y se define como:

$$A \triangle B = \{x \in U/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

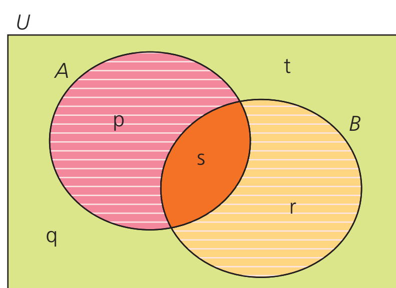


Figura 2

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Dados los conjuntos $U = \{p, q, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$, encuentra la diferencia simétrica entre A y B.

Solución:

Se observa que p pertenece a A pero no a B y r pertenece a B pero no a A. Por tanto, $A \triangle B = \{p, r\}$, como lo muestra la parte sombreada de la Figura 2.

MatemaTICS

Representa operaciones entre conjuntos con WolframAlpha

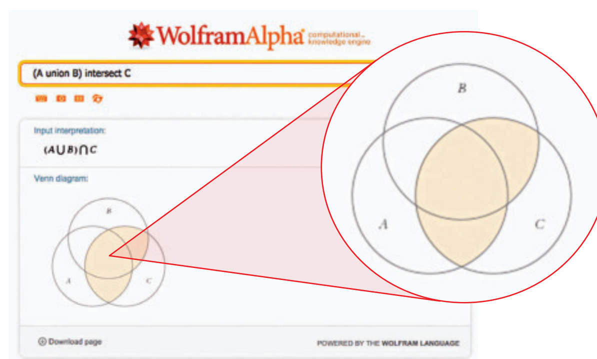
WolframAlpha representa operaciones entre conjuntos en diagramas de Venn. Para ello se utilizan los comandos *union*, *intersect*, *difference*, *symmetric difference of*, *complement* o los símbolos ∪, ∩, \, ϴ, ′, respectivamente.

Observa el procedimiento para representar la operación $(A \cup B) \cap C$.

Se escribe en el recuadro la operación y se da clic en ▤.



Aparece una nueva ventana con la representación.

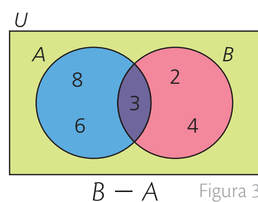


Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.

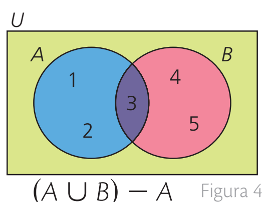
Desarrolla tus destrezas

Comunicación

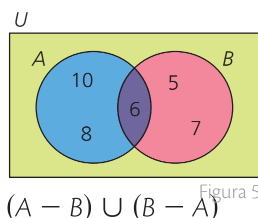
2 Halla los elementos para cada uno de los conjuntos de las figuras 3 a 6.



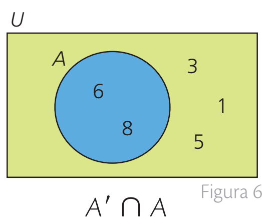
$B - A$ Figura 3



$(A \cup B) - A$ Figura 4



$(A - B) \cup (B - A)$ Figura 5



$A' \cap A$ Figura 6

Ejercitación

3 Encuentra el conjunto que se indica en cada caso, teniendo en cuenta que:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7\}$.

a. A' b. B' c. C'
d. $A \cup B$ e. $(A \cup B)'$ f. $A' \cup B$
g. $A \cap B$ h. $(A \cap B)'$ i. $A' \cap B$
j. $B - A$ k. $(A - B)'$ l. $A' - B'$

Comunicación

4 Halla las operaciones que se proponen. Considera los conjuntos U, A, B y C de la actividad 3.

a. $A' \triangle B$ b. $A' \triangle B'$ c. $A - (A' \triangle B)$

Razonamiento

5 Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos e indica si cada afirmación es verdadera o falsa. Recuerda que un divisor de un número lo divide sin dejar residuo.

$A = \{x/x$ es un divisor de $24\}$
$B = \{x/x$ es un divisor de $48\}$
$C = \{x/x$ es un divisor de $15\}$
$D = \{x/x$ es un número primo$\}$
$E = \{x/x$ es un número par$\}$

a. $A \cup B = B$ ( )
b. $A \cap B$ es un conjunto unitario ( )
c. $C \cap D$ es un conjunto vacío ( )
d. $D \cap E$ es un conjunto unitario ( )
e. $E \subseteq A$ ( )
f. $A \cap B = A$ ( )

Comunicación

6 Observa la Figura 7 y luego, contesta las preguntas.

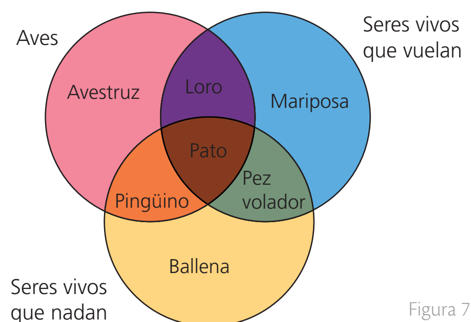


Figura 7

a. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de aves?
b. ¿Cuáles elementos pertenecen al conjunto de seres vivos que vuelan?
c. ¿Cuáles aves no vuelan?
d. ¿Cuáles aves vuelan y nadan al mismo tiempo?

Razonamiento

7 Encuentra en cada caso dos conjuntos A y B tales que:

a. $A \cup B = B$
b. $A \cup B = A$
c. $A \cap B = \{2, 3\}$
d. $A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}$
e. $A - B = \{0, 2, 4\}$
f. $B - A = \{\}$

Resolución de problemas



8 La Figura 8 muestra el número de estudiantes que pertenecen a los clubes H, C y P.

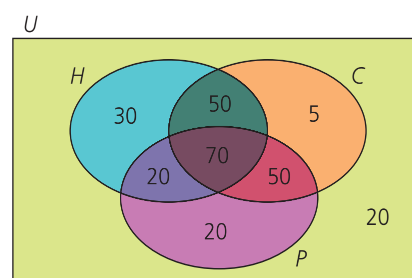


Figura 8

a. ¿Cuántos estudiantes no están en ningún club?
b. ¿Cuántos estudiantes están en el club H?
c. ¿Cuántos estudiantes están a la vez en los tres clubes?

4 Relaciones

Explora

Observa los elementos de los conjuntos A y B.

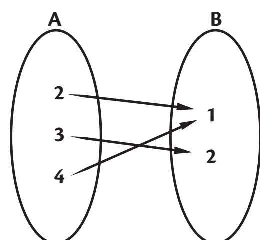


Figura 1

¿Cuántos pares ordenados se pueden formar?

Ten en cuenta

Producto cartesiano

El producto cartesiano A X B se define como:

$A \times B = \{(x, y)\ x \in A \text{ y } y \in B\}$

$A \times B \neq B \times A$

Si *A* define el número natural *n* y *B* define el número natural m, entonces *A* X *B* define el número *n* X *m*.

Ten en cuenta

Las relaciones son subconjuntos de pares ordenados que se forman del **producto cartesiano** entre los elementos de dos conjuntos, como se indica en el ejemplo 2.

4.1 Relaciones

Una relación de un conjunto **A** en un conjunto **B** es el conjunto **R** de pares ordenados que satisfacen una regla o propiedad y tales que, el primer elemento pertenece a **A** y el segundo elemento pertenece a **B**.

$$R \subseteq A \times B$$

El conjunto A se llama conjunto de partida y el conjunto B se llama conjunto de llegada (figura 1).

Ejemplo 1

Es una relación:

Cada persona está relacionada con un nombre

Esto es similar a decir que: A cada persona le corresponde un nombre.

Ejemplo 2

Sean los conjuntos A= {2,3,4} y B={1,2}

El producto cartesiano A X B = {(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)}

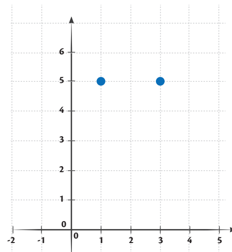
Del producto cartesiano A X B se podrían extraer varias relaciones como:

Relación 1: Conjunto de los pares ordenados tales que los dos elementos del par ordenado sean impares: {(1,5),(3,5)}

Relación 2: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea impar: {(2,1),(3,2),(4,1)}

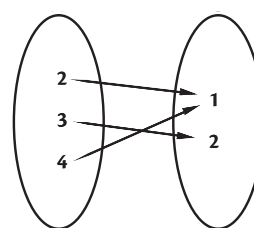
Las relaciones se representan gráficamente mediante el plano cartesiano o un diagrama sagital así:

Plano Cartesiano



Relación 1

Diagrama Sagital



Relación 2

Figura 2

Actividad resuelta

1. En referencia a la figura 1, escribe los pares ordenados de las siguientes relaciones:

a. Conjunto de los pares ordenados cuyo resultado de la suma de sus elementos sea 5 o 6.

b. Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea 1 o 2.

Solución

a. {(3,2),(4,2)}

b. {(2,1), (3,1), (3,2), (4,2)}

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer e identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.

4.2 Relación definida en un conjunto

Relaciones de equivalencia. Una relación R definida sobre AxA se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 3

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
Veamos si R es de equivalencia.

Solución

- Reflexiva.

  En efecto, (1, 1) ∈ R, (2, 2), ∈ R (3, 3), ∈ R y (4, 4) ∈ R luego,

  ∀x (x ∈ A =>xRx)es decir, R es reflexiva

- Simetría.

  En efecto, (1, 2) ∈ R y, (2, 1), ∈ R (3, 4), ∈ R y (4, 3) ∈ R luego,

  ∀x, y ∈ A [(x, y) ∈ R => (y, x)∈ R] es decir, la relación propuesta es simétrica

- Transitividad

  En efecto, (1, 1) ∈ R y, (1, 2), ∈ R => (1, 2), ∈ R

  (1, 2) ∈ R y, (2, 1), ∈ R => (1, 1), ∈ R

  (1, 2) ∈ R y, (2, 2), ∈ R => (1, 2), ∈ R

  (2, 1) ∈ R y, (1, 1), ∈ R => (2, 1), ∈ R

  (2, 1) ∈ R y, (1, 2), ∈ R => (2, 2), ∈ R

  (2, 2) ∈ R y, (2, 1), ∈ R => (2, 1), ∈ R

  (3, 4) ∈ R y, (4, 4), ∈ R => (3, 4), ∈ R

  (3, 3) ∈ R y, (3, 4), ∈ R => (3, 4), ∈ R

  (4, 3) ∈ R y, (3, 3), ∈ R => (4, 3), ∈ R

  (4, 4) ∈ R y, (4, 3), ∈ R => (4, 3), ∈ R luego,

∀x, y, z ∈ A [(x, y) ∈ R ∧ (y, z)∈ R => (x, z)∈ R] y la relación es transitiva.

Se concluye que la relación R es de equivalencia, ya que cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

CULTURA del Buen Vivir

El compromiso

Hacer y cumplir un compromiso, necesita de una voluntad fuerte y el deseo permanente de alcanzar dicha meta.

- Comenta un compromiso que hayas cumplido totalmente a pesar de los inconvenientes que tuviste para lograrlo.

Ten en cuenta

En diagrama sagital se representan las propiedades así

Propiedad reflexiva:

x (x,x) ∈ R

Propiedad simétrica:

x y (x,y) ; (y,x) ∈ R

Propiedad transitiva:

x y z (x,y) ; (y,z) ; (x, z) ∈ R

4 Relaciones

Actividad resuelta

2 Según el diagrama sagital, determine si la relación R es de equivalencia sobre A={1,3,5}.

Solución

R es reflexiva puesto que (1, 1), (3, 3), (5, 5) ∈ R
R es simétrica ya que siempre que si (x, y) ∈ R también (y, x) [R
(1, 3) ∈ R también (3, 1) ∈ R
(3, 5) ∈ R también (5, 3) ∈ R
(1, 5) ∈ R también (5, 1) ∈ R
R es transitiva puesto que siempre que si (x, y) y (y, z) ∈ R también (x, z) [R
(1, 3) y (3, 5) ∈ R también (1, 5) ∈ R
y como R es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces R es una relación de equivalencia sobre A

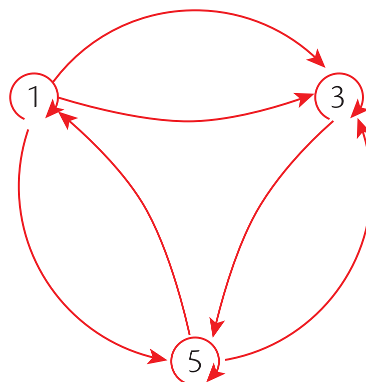


Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Si A={1,2,3} y B={4,5,6}, encuentra AxB, AxA, BxB y representa en:

a. Pares ordenados .
b. Plano cartesiano.
c. Diagrama sagital.

4 Sean: A= {Juana, Mario, Alonso} y B= {12 años,13 años,15 años}, encuentra:

a. AXB en pares ordenados.
b. AxA en plano cartesiano
c. BxA en diagrama sagital.
d. BxB en pares ordenados.

5 Según el diagrama determina:

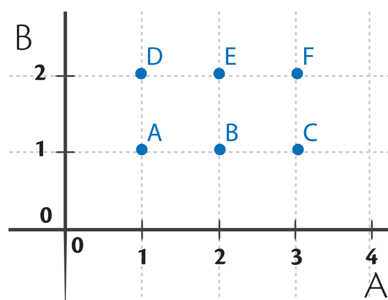


Figura 4

a. AxB en pares ordenados

b. AxB en diagrama sagital

6 Según el diagrama determina.

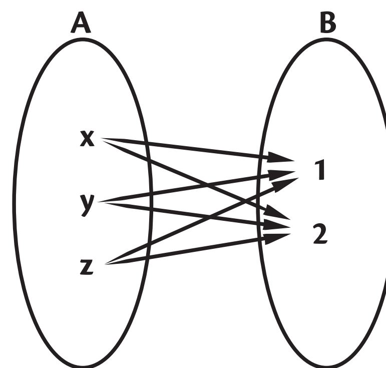


Figura 4

a. AxB en pares ordenados

b. AxB en diagrama cartesiano

7 Si A= {1,2,3} y B={4,5,6}, encuentre las relaciones y represente en diagramas sagitales y cartesiano:

a. R1={(x,y)∈ AxB/ x+y sea un número par}

b. R2={(x,y)∈ AxB/ x+y sea un número impar}

c. R3={(x,y) ∈ AxB/ x+y =7}

d. R4={(x,y) ∈ AxB/ x−y =−3}

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer e identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.

8 Si A= {2,4,5} y B={1,3,5}, la relación:
R={(x,y) ∈ AxB/ x+y sea sea un número primo}

a. R Pares ordenados .

b. R Diagrama sagital.

c. R en diagrama cartesiano.

d. El dominio y el rango.

9 Si A= {2,4,6} y B={1,3,5}, la relación:
R={(x,y) ∈ AxB/ x>y} encuentra:

a. R Pares ordenados .

b. R Diagrama sagital.

c. R en diagrama cartesiano.

d. El dominio y el rango.

10 Dado el conjunto A={1,2,3};
R={(x,y)∈ AxA/ x+y sea un número par} encuentra:

a.R Pares ordenados .

b. R Diagrama sagital.

c. El dominio y el rango.

11 En la relación del ejercicio 9 determina:

a. Si R es reflexiva .

b. Si R es simétrica.

c. Si R es Transitiva.

d. Si R es de equivalencia.

12 Si R={ (2,2) ; (2,3); (3,4) ; (3,3); (4,4) ; (3,2); (4,3) ; (2,4);(4, 2)}:
Determina:

a. R en diagrama sagital .

b. El Dominio y Rango.

c. Si R es reflexiva.

d. Si R es simétrica.

e. Si R es Transitiva.

f. Si R es de equivalencia.

13 Si R={ (2,2) ; (2,3); (3,4) ; (3,3); (4,4) ; (3,2); (4,3) ; (2,4);(4, 2)}:
Determina:

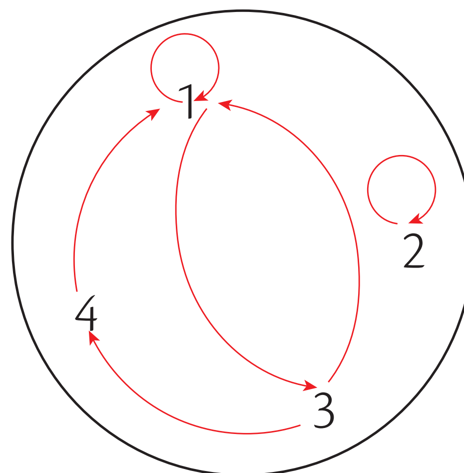


Figura 5

a. R en pares ordenados .

b. El dominio y Rango.

c. Si R es reflexiva.

d. Si R es simétrica.

e. Si R es Transitiva.

f. Si R es de equivalencia.

14 10. Dado el conjunto A={1,2,3,4};
R={(x,y) ∈ AxA/ x es divisor de y} Encuentra :

a.R Pares ordenados .

b. R diagrama sagital.

c. El dominio y el rango.

15 En la relación del ejercicio 13, determina:

a. Si R es reflexiva .

b. Si R es simétrica.

c. Si R es Transitiva.

d. .Si R es de equivalencia.

5 Funciones

Explora

El costo de un par de zapatillas deportivas es $ 114. El patrocinador decide donar un par de zapatillas a cada uno de los atletas de un equipo de atletismo.



- ¿Cuál es el costo de la donación?

Las variables que se relacionan son número de pares de zapatillas deportivas y costo. Para saber cuál es el costo de la donación, se debe establecer una fórmula que relacione la cantidad de pares de zapatillas con su costo. Para ello, se construye la Tabla 1 que permite ver la variación entre las magnitudes relacionadas.

Pares de zapatillas	1	2	3	...	7
Costo ($)	114	228	342	...	798

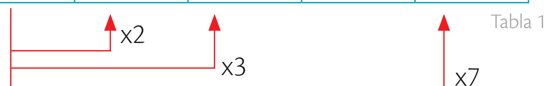


Tabla 1

Por x pares de zapatillas se pagan $ 114x. Para conocer el costo de la donación, se reemplaza x por el número de atletas, pues a cada uno le corresponde un par de zapatillas. Así, se tiene la expresión $y = 114x$. Cada valor de la primera fila de la tabla está relacionado con uno de la segunda fila. A esta relación se le llama **función**.

Una relación entre dos conjuntos X e Y se llama **función** si cada elemento x del primer conjunto, llamado conjunto de partida, se relaciona como máximo con un elemento y del segundo conjunto, llamado conjunto de llegada.

Para denotar una función se utilizan las letras del alfabeto f, g y h. Además, se puede utilizar la notación de conjuntos $f: X \rightarrow Y$, que se lee "f de X en Y", o la notación de igualdad $y = f(x)$, que se lee "y igual a f de x".

Ten en cuenta

A la expresión $f(x)$ se le conoce como imagen de x mediante la función f.

Ejemplo 1

Si el equipo de atletismo está conformado por 14 atletas, para conocer el costo de la donación se reemplaza x por 14 en la expresión $y = f(x) = 114x$. Por lo tanto, la donación sería de $ 114(14) = $ 1 596.

5.1 Dominio y rango de una función

El **dominio** de una función f de X en Y, denotado Df o $D(f)$, corresponde al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x.

El **rango** o **recorrido** de una función f de X en Y, denotado Rf o $R(f)$, es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio.

El rango de la función es el conjunto de números reales positivos, $R(f) = [0, \infty)$.

Las funciones se pueden representar mediante un enunciado o expresión verbal de la dependencia entre las dos variables, una tabla, una expresión algebraica o fórmula y una gráfica.

App

Funciones

Abre la aplicación *Scientific Plot Calculator* y utilízala para representar funciones lineales y cuadráticas, identificar sus variaciones, máximos y mínimos y demás características.



Ejemplo 2

La expresión verbal que relaciona una variable y con el doble de un número x más uno se puede representar mediante la fórmula $y = 2x + 1$.

De la misma forma, esta función se puede representar mediante la Tabla 2.

x	1	2	3	5	10	35
$y = 2x + 1$	3	5	7	11	21	71

Tabla 2

Cada valor de la segunda fila se obtiene reemplazando los valores respectivos de x en la fórmula $y = 2x + 1$. Esto es:

$2(1) + 1 = 3 \quad 2(2) + 1 = 5 \quad 2(3) + 1 = 7 \quad 2(5) + 1 = 11$

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en Z.

5.2 Representación gráfica de una función

Para representar una función gráficamente, luego de trazar los ejes *X* e *Y* del plano cartesiano, se ubican las parejas ordenadas de la forma (*x*, *y*) obtenidas al dar valores a la variable *x* y calcular su respectiva imagen *y*.

Ejemplo 3

En la función que está determinada por la expresión $y = 3 + 5x^2$, la variable independiente puede tomar cualquier valor real.

Sin embargo, para su estudio se toman algunos valores y después se determinan las parejas ordenadas descritas en la Tabla 3.

x	$y = 3 + 5x^2$	(*x*,*y*)
−3	48	(−3, 48)
−2	23	(−2, 23)
−1	8	(−1, 8)
0	3	(0, 3)
1	8	(1, 8)
2	23	(2, 23)
3	48	(3, 48)

Tabla 3

Por último, se ubican las parejas de puntos (*x*, *y*) en el plano cartesiano y se traza la curva que los une, pues el dominio es el conjunto de números reales. Así, se obtiene la Figura 1, donde se observa que el rango de la función está definido por el subconjunto de números reales mayores o iguales que 3, es decir $R(f) = [3, \infty)$.

Para reconocer si una gráfica representa una función se traza una recta vertical (paralela al eje *Y*). Si esta recta interseca como máximo en un punto a la gráfica, entonces representa una función.



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt09

Encuentra otros datos y ejemplos relacionados con las funciones.

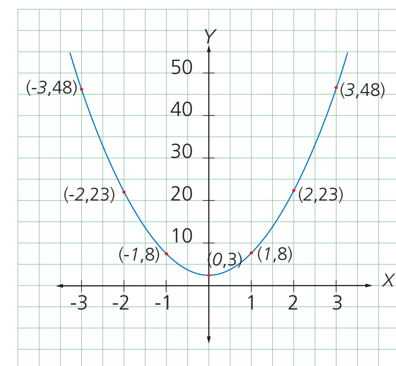


Figura 1

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Indica si las siguientes gráficas representan o no una función.

a.

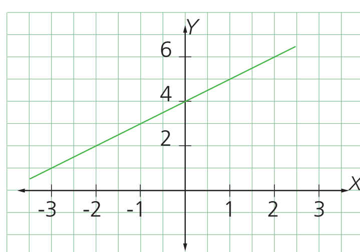


Figura 2

b.

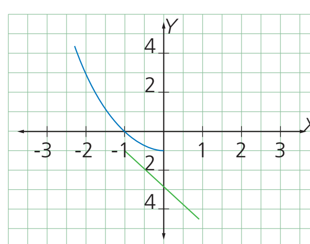


Figura 3

Ten en cuenta

También se representan funciones con diagramas de Veen.

Solución:

a.

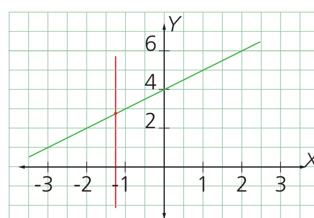


Figura 4

La recta vertical solo interseca a la gráfica en un punto. Es una función.

b.

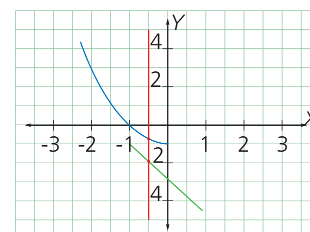


Figura 5

La recta vertical interseca a la gráfica en dos puntos. No es una función.

5 Funciones

MatemaTICS

Representar funciones con GeoGebra

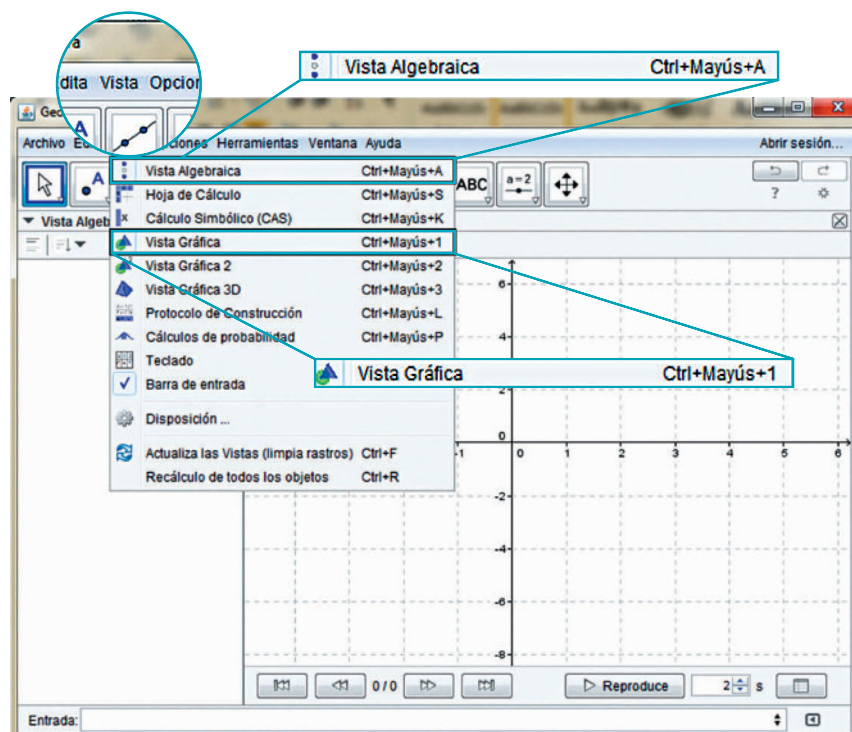
Dentro de las herramientas con las que cuenta GeoGebra está la de representar funciones gráficamente. El primer paso para ello es dar clic en el menú *Vista* y seleccionar *Vista Algebraica* y *Vista Gráfica*. La primera opción es para ingresar la expresión algebraica de la función y la segunda para representarla gráficamente.

- Observa los pasos:

Haz clic en el botón *Vista*.

Selecciona *Vista Algebraica*. Se abrirá una ventana para ingresar expresiones algebraicas.

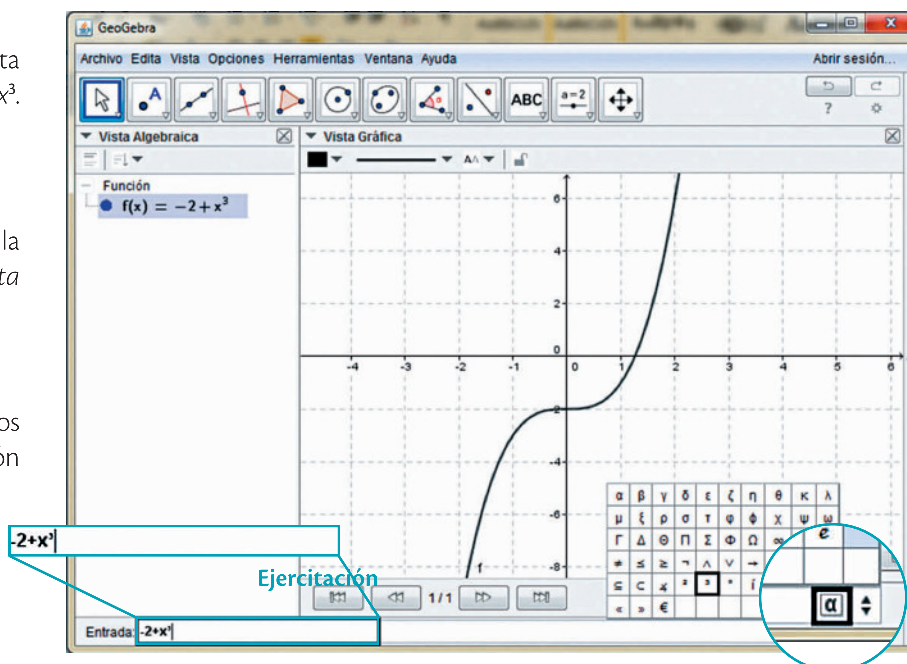
Selecciona *Vista Gráfica*. Se abrirá una ventana con el plano cartesiano.



Escribe la fórmula que representa la función. En este caso, 22 + x^3. Luego, oprime la tecla *Enter*.

Al dar *Enter* se mostrará la gráfica de la función en la *Vista Gráfica* del programa.

Para obtener algunos símbolos especiales, haz clic en este botón **α**.



Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en Z.

Desarrolla tus destrezas

2 Indica si cada relación es una función. Justifica cada una de tus respuestas.

a.

Integrante	Edad (años)
Felipe	11
Lucía	14
Miguel	12
Rocío	11
Esteban	13
Alfonso	15
Angélica	10

Tabla 3

b. Por cada dos libras de azúcar se agregan cinco litros de agua.

c.

Cuadernos	Precio ($)
1	800
3	2 300
6	4 500
10	7 600
20	14 500
30	21 000

Tabla 4

d. Se requieren cuatro baldosas por cada metro cuadrado de superficie.

3 Escribe el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a.

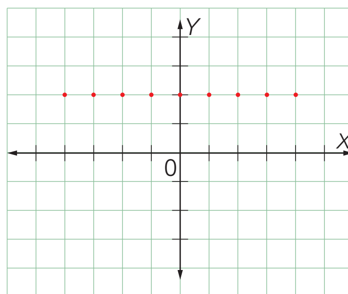


Figura 6

b. El radio de un círculo es r cm. La expresión que relaciona el área A del círculo con su radio es πr^2.

c. Varios voluntarios se acercan a un hospital para donar sangre. La función que describe la cantidad de sangre disponible en un día x es $f(x) = 3x + 7$.

4 Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con sus respectivas imágenes mediante la función $f(x) = 6 - 4x^4$.

a. $f(-1)$ • 6
b. $f(-3)$ • $-1\,018$
c. $f(0)$ • 2
d. $f(2)$ • -318
e. $f(-4)$ • -58

Razonamiento

5 Representa las funciones de los ejemplos en diagramas de Veen y escribe su expresión algebraica.

a. Una persona recorre en bicicleta 5 km en una hora. ¿Qué distancia recorre en 4 horas sin detenerse?

b. En una tableta hay 1,976 gr de bicarbonato de sodio. ¿Cuánto bicarbonato habrá en 26 de estas tabletas?

c. En una ciudad la población en el año 2010 era de 5 401 habitantes. A partir de ese momento comenzaron a nacer tres niños por año. De mantenerse este comportamiento, ¿cuántos niños habrán nacido en el 2025?

6 Escribe V o F conforme a si la relación es una función.

a. A cada ciudadano le corresponde un número de identificación nacional. ( )

b. A cada bebé de un hospital le corresponde una edad (en meses). ( )

c. A cada día de un mes le corresponde un número entre 1 y 31. ( )

d. A cada árbol frutal le corresponde una única fruta. ( )

Resolución de problemas 

7 La intensidad del sonido que percibe el oído humano depende de la distancia entre el receptor y el emisor. De esta forma, la intensidad I en decibelios que recibe el receptor está dada por la fórmula $I = 100/d^2$, donde d es la distancia (en metros).

a. Construye una tabla con seis valores diferentes para la distancia.

b. Determina el dominio y el rango de la función.

c. Grafica la función y representa en diagrama de Veen.

d. ¿Qué sucede si se aumenta la distancia entre el emisor y el receptor del sonido?

6 Continuidad y variación de funciones

Explora

Un ciclista sube una montaña por carretera. En su camino se encuentra con que un puente se ha caído debido a condiciones climáticas adversas.



- ¿Es posible para el ciclista realizar la hazaña sin desviarse del camino que había trazado?

La única forma de continuar el recorrido de ascenso a la montaña sería dando un gran salto a través del puente que se derrumbó, y en la realidad este hecho es imposible.

Estas situaciones se pueden modelar por medio de gráficas de funciones discontinuas.

6.1 Continuidad de una función

La idea intuitiva de que una **función es continua** es que la gráfica de esta puede ser construida de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

La gráfica de una función continua en un intervalo no presenta saltos ni rupturas. Los puntos donde la función no es continua se llaman **puntos de discontinuidad.**

Ejemplo 1

Un café que se inauguró hace dos semanas pretende prestar sus servicios durante 24 horas toda la semana. Pero una falla en el servidor principal los obliga a hacer interrupciones para realizar el mantenimiento del equipo. Entonces, durante cada día de la tercera semana se suspende el servicio por cuatro horas; en la cuarta semana, se suspende por tres horas; y, a partir de la quinta semana se reanuda el servicio a tiempo completo. La información anterior se representa en la Figura 1.

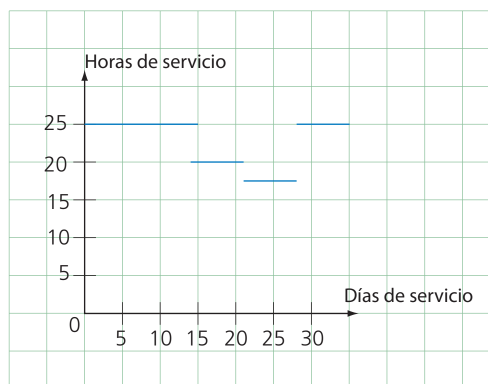


Figura 1

La gráfica presenta "saltos". Por lo tanto, la función es discontinua.

Ten en cuenta

La tasa de variación *TV* de una función *f*(*x*) en un intervalo [*a*, *b*] indica el cambio (aumento o disminución) que experimenta la función cuando la variable independiente pasa del valor *a* al valor *b*.

6.2 Variación de una función en un intervalo

La variación de una función en un intervalo está determinada por su tasa de variación, denotada *TV* y calculada mediante la fórmula $TV[a, b] = f(b) - f(a)$.

- Si la variable *y* aumenta a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es positiva.
- Si la variable *y* disminuye a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es negativa.
- Si la variable *y* permanece igual a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es nula.

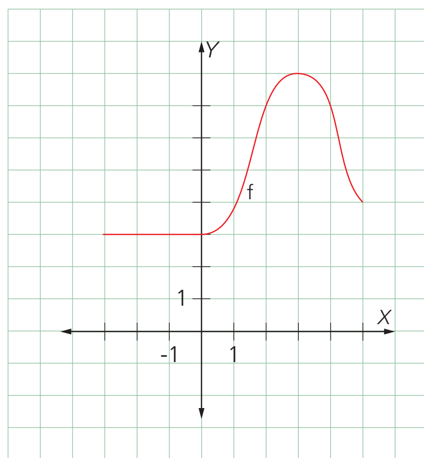


Figura 2

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina la tasa de variación de la función en los intervalos de la Figura 2.

a. [23, 0] **b.** [0, 2] **c.** [2, 5]

Solución:

a. $TV[-3, 0] = f(0) - f(-3) = 3 - 3 = 0$ Tasa de variación nula

b. $TV[0, 2] = f(2) - f(0) = 7 - 3 = 4$ Tasa de variación positiva

c. $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = 4 - 7 = -3$ Tasa de variación negativa

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Observa las figuras e indica los intervalos de continuidad de cada función.

a.

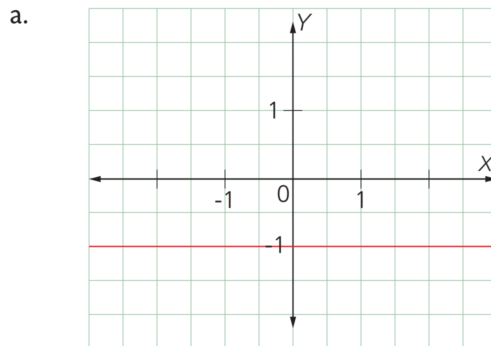


Figura 2

b.

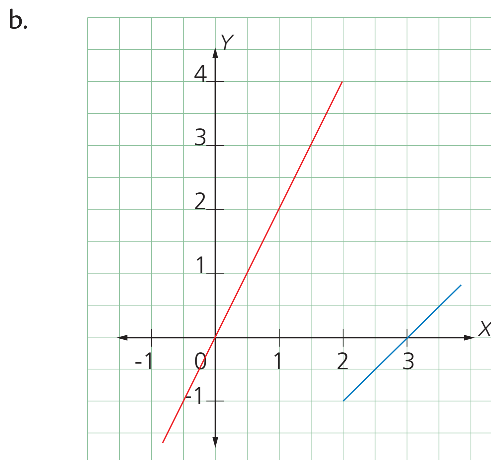


Figura 3

c.

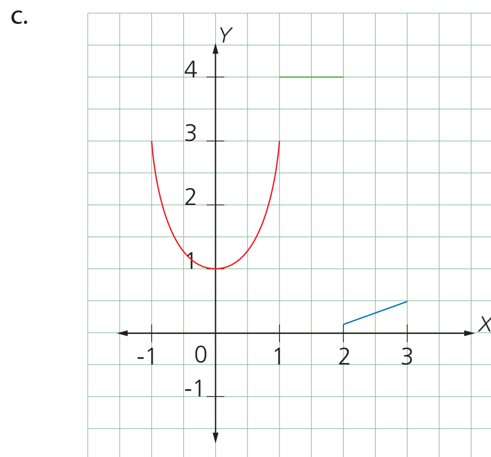


Figura 4

d.

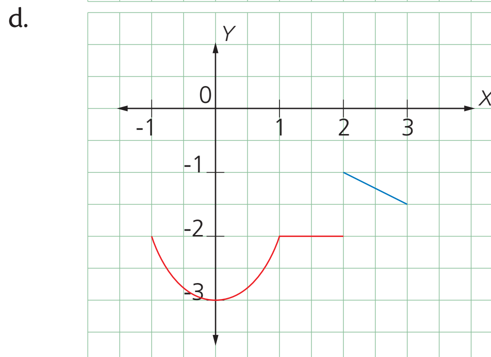


Figura 5

3 Observa las figuras dadas y escribe en qué puntos las funciones son discontinuas.

a.

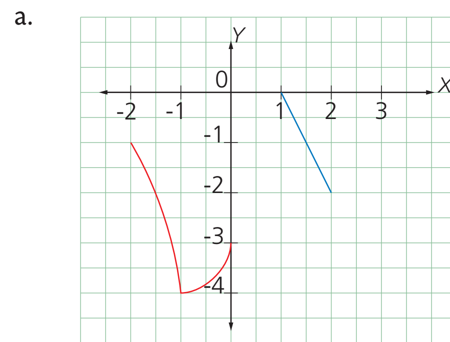


Figura 6

b.

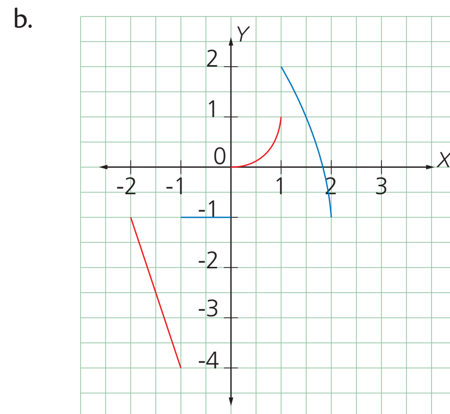


Figura 7

4 Halla la tasa de variación de cada función en el intervalo $[-4, 3]$ e indica si es positiva, negativa o nula.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ b. $f(x) = -3x + 2$

c. $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ d. $f(x) = -3$

Razonamiento

5 Responde:

a. ¿Una función puede tener una tasa de variación nula en un intervalo y no ser constante?

b. ¿Qué sucede si en la fórmula para calcular la tasa de variación de una función se toma $f(a) - f(b)$?

6 Plantea una función que tenga cada característica:

a. Tasa de variación nula en el intervalo [22, 4]

b. Tasa de variación negativa en el intervalo [1, 6]

c. Tasa de variación positiva en el intervalo [3, 5]

Resolución de problemas

7 Un técnico de servicios cobra $ 30 por el desplazamiento y $ 10 por cada hora que dura la reparación.

a. Representa la función que modela la situación.

b. ¿Es continua la función en todo su dominio?

7 Crecimiento y decrecimiento de funciones

Explora

Debido a los efectos climáticos que experimenta la Tierra desde hace algunas décadas, la temperatura de un glaciar ha pasado de −26 °C en el año 1955 a −10 °C en el año 2015.



- ¿Cómo está aumentando o disminuyendo la temperatura del glaciar?

La temperatura del glaciar pasó de −26 °C a −10 °C. Para determinar qué cambio tuvo se calcula la tasa de variación en el intervalo de tiempo [1955, 2015] así:

$$TV[1955, 2015] = -10 - (-26) = -10 + 26 = 16$$

Como la tasa de variación es positiva, entonces la temperatura aumentó en 16 °C.

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación es positiva** (Figura 1).

Una función es decreciente en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación en negativa** (Figura 2).

Una función es constante en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo, la **tasa de variación es nula** (Figura 3).

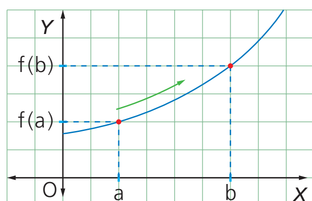


Figura 1

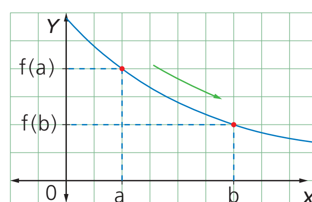


Figura 2

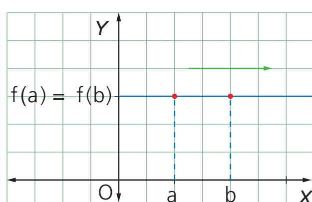


Figura 3

7.1 Máximos y mínimos

En una función continua se puede determinar un punto máximo o uno mínimo relativo según estas condiciones:

- **Máximo relativo**, si a su izquierda la función crece y a su derecha decrece.
- **Mínimo relativo**, si a su izquierda la función decrece y a su derecha crece.

Además, el mayor de todos los valores que tiene la función se llama **máximo absoluto** y el menor se llama **mínimo absoluto**.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 El número de personas conectadas a una página de internet desde las 8 a. m. hasta las 8 p. m. se muestra en la Figura 4 Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos máximos y los puntos mínimos.

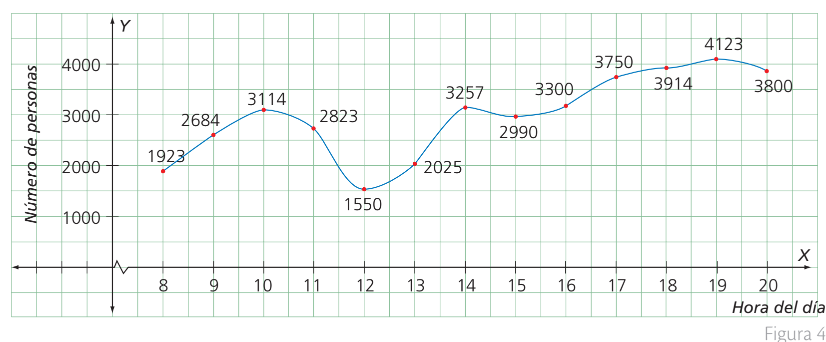


Figura 4

Solución:

La función es creciente en [8, 10], [12, 14] y [15, 19], pues la tasa de variación en estos intervalos es positiva. La función es decreciente en [10, 12], [14, 15] y [19, 20], ya que la tasa de variación es negativa en estos intervalos.

Antes de las 10 la función crece y luego decrece. La función presenta un máximo relativo en el punto $x = 10$. Al contrario, antes de las 12 la función decrece y luego crece. La función tiene un mínimo relativo en el punto $x = 12$.

A las 19 la conectividad es la más alta y por ende en este valor la función alcanza el máximo absoluto. De la misma forma, a las 12 está conectado el menor número de personas, y en este valor la función alcanza un mínimo absoluto.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Analiza el crecimiento o decrecimiento de la función dada en los intervalos.

a. [−3, −1] b. [0, 1]

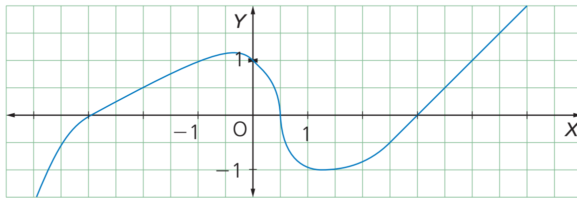


Figura 5

3 Determina los máximos y mínimos de la función.

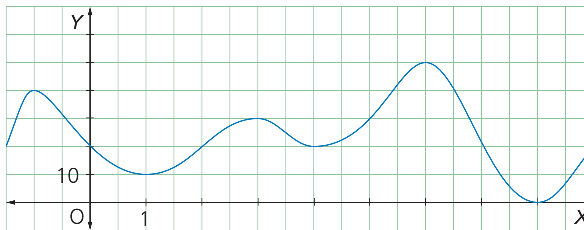


Figura 6

4 Indica los intervalos donde la función de la Figura 7 es creciente, constante y decreciente.

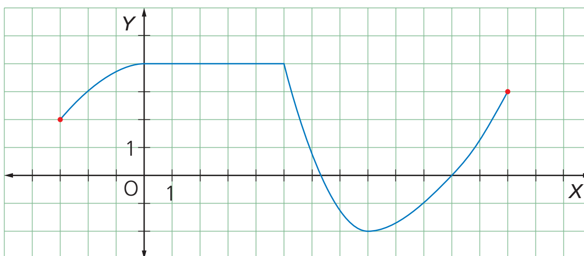


Figura 7

5 Observa la función de la Figura 8 y responde. ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función en el intervalo [−2, 2]? ¿Son absolutos o relativos?

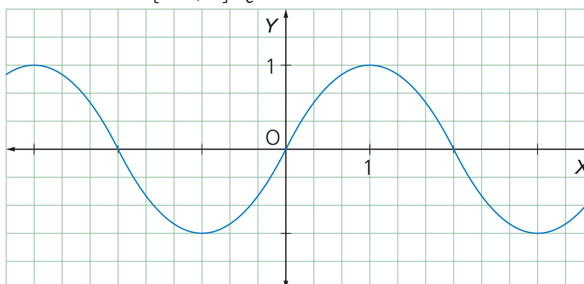


Figura 8

Razonamiento

6 Traza la gráfica de una función continua que cumpla con las siguientes condiciones:

- Que tenga un máximo en el punto (2, 1) y un mínimo en el punto (5, 6).

Modelación

7 Dibuja la gráfica de la función cuyas características son:

Dominio: [23, 3] Recorrido: [24, 5]

Mínimos en [22, 24] y [2, 24] Máximo en [0, 5]

8 Indica dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función cuyo estudio del crecimiento es el siguiente:

Crece en los intervalos [−∞, −5] y [−2, 4].

Decrece en los intervalos [−5, −2] y [4, ∞].

Resolución de problemas

9 Un bus universitario hace dos paradas en cada viaje, además de la inicial, para recoger estudiantes. En la Figura 9 se muestra su recorrido diario.

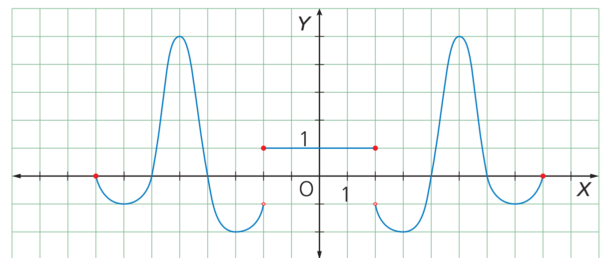


Figura 9

Determina:

a. El dominio y el recorrido.

b. Los intervalos de continuidad y discontinuidad.

c. La tasa de variación en los siguientes intervalos: [−5, −3], [−2, 0] y [4, 5].

d. El crecimiento y el decrecimiento.

e. Los máximos y mínimos absolutos y relativos.

10 La Figura 10 representa la ruta de un bus universitario.

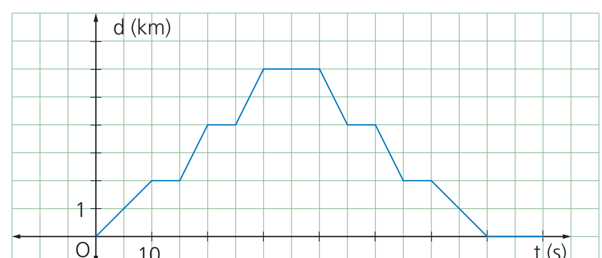


Figura 10

Responde:

a. ¿A cuántos kilómetros está la universidad?

b. ¿Cuánto tiempo tarda el trayecto a la universidad?

c. ¿Cuánto tiempo está parado el bus en su recorrido?

d. ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

Practica Más

Dependencia entre magnitudes

Comunicación

1. Completa las tablas y haz las gráficas correspondientes.

a. El costo de un minuto a celular es de $ 0,6

Min	0	1	2	3	4	5	6
Valor ($)							

Tabla 1

b. El alquiler de un carro por día cuesta $ 120.

Día	0	1	2	3	4	5	6
USD							

Tabla 2

c. El costo de un pasaje de bus es de $ 0,25

Pasaje	0	1	2	3	4
Valor ($)					

Tabla 3

2. Expresa mediante una fórmula cada situación.

a. El área de un triángulo de base 5 cm en términos de su altura.

b. El volumen de un cilindro de 7 dm de altura en términos de su radio.

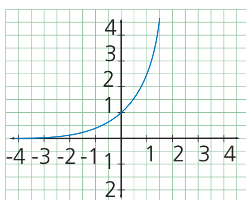
c. El radio de un círculo en términos de su área.

d. La altura de un triángulo en términos de su base, si su área es de 42 cm^2.

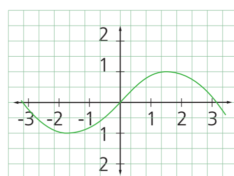
Funciones

3. Identifica si las siguientes gráficas son o no funciones. Identifica dominio y rango en las que lo sean.

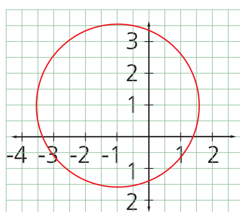
a.



b.



c.



d.

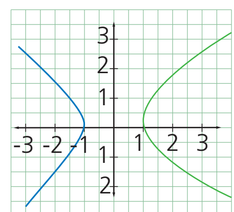


Figura 1

4. Representa las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x^2 - 3x$

b. $g(x) = 2x - 4$

c. $h(x) = \sqrt{x + 3} + 3$

d. $k(x) = x^3 - x^2$

Continuidad y variación de funciones

Resolución de problemas

5. Analiza cada situación. Identifica su expresión algebraica. Grafícala e identifica si es continua o discontinua.

a. El costo de un minuto a celular es de $ 0,6.

b. El precio a pagar por consumo de energía es de $ 13,5 kw/h más un cargo fijo de $ 2,10. Si el consumo excede los 500 kw/h el precio del kw/h se incrementa a $ 17.

c. Una distribuidora vende Gelatinas a $ 0,70 c/u, si se compran hasta 15 000 unidades. Si se compran entre 15 000 y 30 000 el costo disminuye a $ 0,50 c/u. Para cantidades mayores a 30 000 el costo es de $ 0,45 c/u.

Razonamiento

6. Halla la tasa de variación en el intervalo [2,3] en cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 1x$

b. $h(x) = 2x^3 - 3x^2$

c. $k(x) = x^4 - x^3$

d. $g(x) = \sqrt{2x - 1} - 1$

7. Representa una función en cada caso según las características solicitadas.

a. Dominio: R
Recorrido: R^+
Discontinua en x = 2
Mínimo en (3,6)

b. Dominio: R
Recorrido: R^-
Continua.
Máximo en (1,3)

Crecimiento y decrecimiento de funciones

Razonamiento

8. Identifica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función.

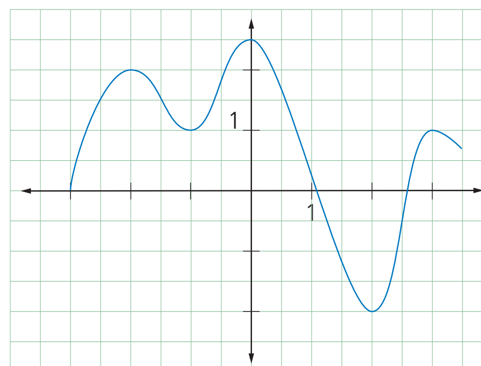


Figura 2

Resolución de Problemas

Estrategia: Seguir un método

Problema

Un automóvil está parado en el semáforo esperando la luz verde. Cuando el semáforo cambia a verde, el automóvil arranca y aumenta poco a poco su velocidad. La distancia que recorre está modelada por la función $d(x) = 2t^2$, t expresado en segundos y la distancia en metros.

¿Cómo cambia la distancia que recorre el automóvil a través del tiempo?

1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son las variables que intervienen en el enunciado del problema?
  R: Las variables son el tiempo y la distancia recorrida.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: La relación que se establece entre el tiempo que transcurre y la distancia que el automóvil recorre.

2. Crea un plan

- Identifica la variable independiente y la dependiente. Después, representa en una tabla y en una gráfica la relación entre el tiempo y la distancia recorrida.

3. Ejecuta el plan

- La distancia que recorre el automóvil depende del tiempo que transcurre.
- Al reemplazar t por algunos números, tenemos:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$d(m)$	0	2	8	18	32	...	...

Tabla 1

- Al representar lo anterior gráficamente, obtenemos:

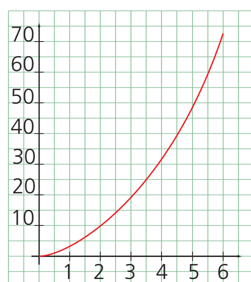


Figura 1

R: La distancia que recorre aumenta cada vez más, pero no de manera directamente proporcional.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la variación de la función $d(t)$ en los intervalos (1,2) , (2,3) y (3,4) es 4.

Aplica la estrategia

1. En un triángulo equilátero, la altura está dada por la expresión $h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde l es el lado del triángulo. Según lo anterior, ¿cómo cambia el área del triángulo al cambiar su lado?
   a. Comprende el problema
   ....
   ....
   b. Crea un plan
   ....
   ....
   c. Ejecuta el plan
   ....
   ....
   d. Comprueba la respuesta
   ....
   ....

Resuelve otros problemas

2. Se define una relación en la cual a cada número natural se le asigna un divisor primo. ¿Esta relación es una función?
3. La función $f(x) = 30x + 20$ representa el costo de producción de ciertos artículos en una fábrica. ¿Cómo varían los costos cuando la producción pasa de 250 a 450 artículos?
4. La función $f(x) = 4x - x^2 - 2$ representa el movimiento de un objeto que flota en el aire, ¿la función tiene un máximo en $x = 2$?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

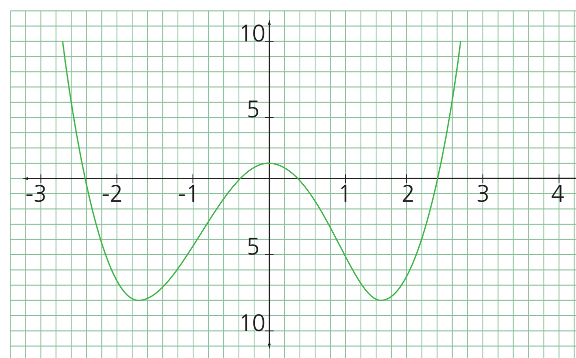


Figura 2

8 Proporcionalidad directa

Explora

Marta trabaja por horas en un café internet y cobra $ 10 cada hora.



- ¿Cuánto recibirá si trabaja dos horas? ¿Y si trabaja tres horas?

Marta cobra $ 10 por una hora de trabajo. En dos horas ganará el doble y en tres horas el triple. Estas cantidades se calculan así:

- El doble de $ 10 : $2 \times 10 = 20$
- El triple de $ 10: $3 \times 10 = 30$

En el anterior ejemplo se evidencia que, mientras aumenta el número de horas de trabajo, también aumenta el valor que percibe Marta. Por lo tanto, este es un caso particular de **proporcionalidad directa**.

Dos variables x e y están en **proporción directa** cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción; es decir, si su razón $\frac{y}{x}$ es constante.

Ejemplo 1

Observa cómo se relacionan *el espacio* recorrido por un tren de alta velocidad y el número de minutos de viaje.

Espacio (km)	10	50	200	500	...	y
Tiempo (min)	2	10	40	100	...	x

Tabla 2

De la información de la tabla 1 se puede concluir que y (*espacio*) y x (*tiempo* transcurrido del viaje, expresado en minutos) son magnitudes directamente proporcionales, ya que presentan correlación directa y los cocientes de las cantidades correspondientes son constantes.

$$\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{200}{40} = \frac{500}{100} = \frac{y}{x} = 5 \text{ km/min}$$

Una vez establecida la constante de proporcionalidad, se determina la expresión algebraica que relaciona las dos magnitudes:

$$y = 5x$$

La función se representa gráficamente en la figura 1

Esta relación es una función, ya que para cada valor del tiempo x hay un único valor para el espacio y.

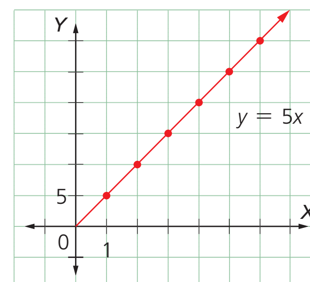


Figura 1

Sabías que...

El matemático alemán Gottfried Leibniz (1646 – 1716) fue el primero que utilizó el término *función*, pero el símbolo $f(x)$ lo empleó por primera vez el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783).

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Si tres paquetes de dulces cuestan $ 8, 10 ¿cuánto cuestan 15 paquetes?

Solución:

Si y es el precio de x paquetes de dulces, entonces:

$$\frac{y}{x} = \frac{8{,}10}{3}$$

El precio de 15 paquetes se obtiene sustituyendo $x = 15$.

$$\frac{y}{15} = \frac{8{,}10}{3} = 40{,}5$$

Destreza con criterios de desempeño: 330 caracteres incluye espacios

8.1 Función lineal

Las **funciones lineales** son de la forma $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero. Una función lineal transforma todos los elementos del dominio, multiplicándolos por un mismo número.

Ejemplo 2

La función $f(x) = 5x$ es la función lineal que multiplica todos los números por cinco. La Tabla 2 es una tabla de valores para la función:

x	-4	-2	0	1	8	9,3	100	1 234
$f(x)$	-20	-10	0	5	40	46,5	500	6 170

Tabla 2

El número m de la expresión $f(x) = mx$ puede ser negativo, decimal, una fracción, un irracional, etc.

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones lineales:

$$f(2) = -4x \qquad g(x) = 3{,}67x \qquad h(x) = \frac{1}{2}x \qquad i(x) = \sqrt{3}x$$

Las **funciones lineales** permiten estudiar las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes. Además, la **pendiente** de la recta de una función indica el cambio de la variable y por cada unidad de la variable x.

Ten en cuenta

Una función lineal cuya representación gráfica es un línea recta cumple la condición de que siempre es creciente o decreciente.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 En la Figura 2 se muestra cómo una fuerza F que actúa sobre un resorte para producir en él un alargamiento x, está dada por la expresión $F = kx$, donde x es el alargamiento producido y k es una constante que depende del tipo de material. Si se tiene que la constante de elasticidad es $k = 5\frac{\text{N}}{\text{m}}$, la fórmula correspondiente se puede escribir como:

$f(x) = 5x$, que corresponde a una función lineal.

Elabora la gráfica de la función $f(x)$

Solución:

La Tabla 3 corresponde a la función $f(x)$. Para representarla basta con dibujar dos puntos de la función y dibujar la recta que pasa por ellos. Ten en cuenta la Figura 2.

x	$f(x)$
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30

Tabla 3

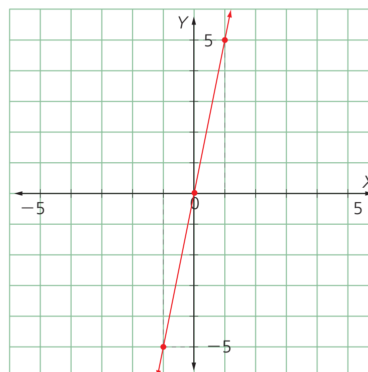


Figura 3

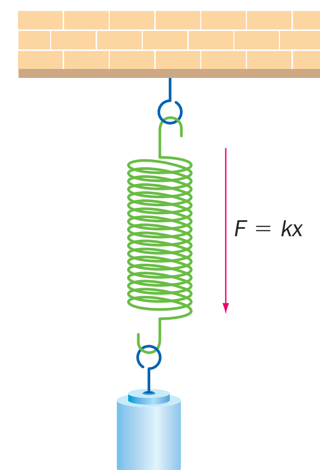


Figura 2

8 Proporcionalidad directa

MatemaTICS

Grafica familias de funciones lineales con GeoGebra

Abre el programa GeoGebra.

Digita en el cuadro de *Entrada* la expresión de una función lineal. En este caso se ha considerado $f(x) = 4x - 6$.

Haz clic derecho sobre la recta que obtengas y en la opción de *propiedades*. Desde allí puedes cambiar su color, su estilo y su grosor.

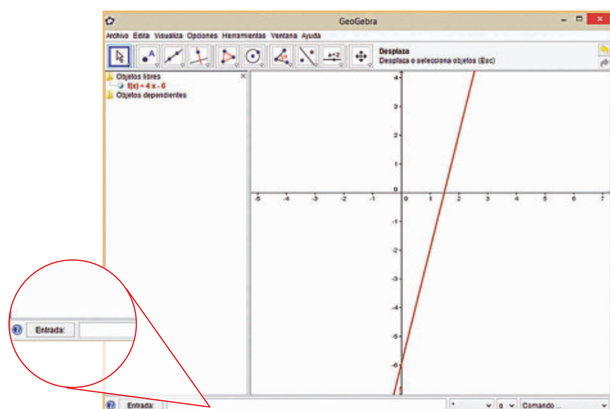


Figura 3

Selecciona en el botón [a=2] la opción *Deslizador* y, una vez que aparezca un cuadro de diálogo como el que se muestra a la derecha, selecciona sobre este la opción *Aplic* y aparecerá un segmento en el que se indicará la posición de un punto *a* que se puede desplazar entre dos valores mínimo y máximo prefijados. Estos valores se pueden modificar.

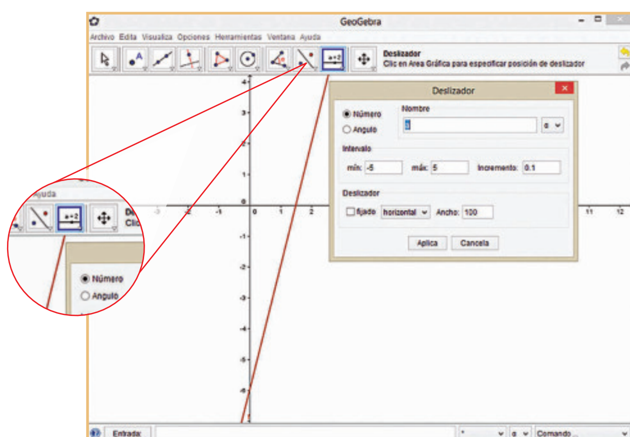


Figura 4

Varía el valor de *a* en el *Deslizador* haciendo clic en la flecha que se destaca en el pantallazo de la derecha. Ubícate sobre el punto *a* y desplázalo. Observa cómo varía el valor de la pendiente mientras que la intersección con el eje *y* se mantiene constante.

En este caso, se ha deslizado el valor de *a* hasta $-3{,}9$.

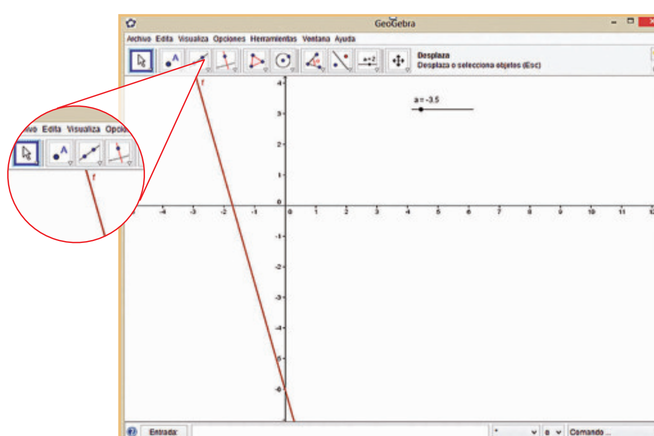


Figura 5

Observa que si seleccionas $a = 0$, la pendiente es 0 y la ecuación de la recta correspondiente es $f(x) = -6$.

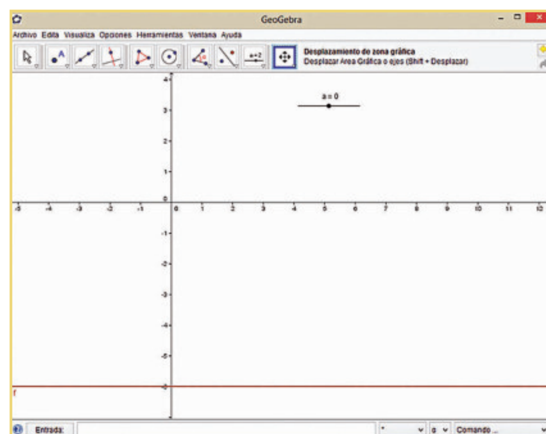


Figura 6

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica con el empleo de la tecnología.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Indica si las situaciones dadas son de proporcionalidad directa. En caso afirmativo, determina la expresión algebraica que las relaciona y la constante de proporcionalidad respectiva.

a. En un establo, 12 caballos consumen un camión de heno en cuatro días, y 24 caballos consumen la misma cantidad de heno en dos días.

b. Un vehículo que circula a velocidad constante recorre 20 kilómetros en cinco horas. Al cabo de ocho horas ha recorrido 32 kilómetros.

4 Indica cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad directa.

a. $y = -5x$ b. $y = 0{,}04 + 23x$

c. $y = 1 - x^2$ d. $y = 0{,}3x$

5 Construye la tabla de valores correspondiente y representa las siguientes funciones lineales.

a. $y = 2x$ b. $y = 3x$

c. $y = -2x$ d. $y = 4x$

Razonamiento

6 Selecciona la tabla de valores que corresponde a la función $f(x) = \frac{4}{3}x$.

a

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	0

b.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0

c.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{6}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

d.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$

7 ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de la función $y = x - \frac{3x}{7}$?

Comunicación

8 Expresa cada una de las funciones por medio de una ecuación e indica cuál o cuáles son de proporcionalidad directa. Ten en cuenta que a cada número real:

a. le corresponde su doble.

b. le corresponde su doble más cinco.

c. le corresponde su cuadrado más tres.

9 ¿Cuáles de estas relaciones son funciones lineales?

a. A cada número se le hace corresponder el triple de su siguiente.

b. A cada número real se le hace corresponder el mismo número menos el 10% de su mitad.

c. A cada número real se le hace corresponder el producto de su anterior por su posterior.

10 Selecciona la ecuación que corresponde a cada gráfica.

a.

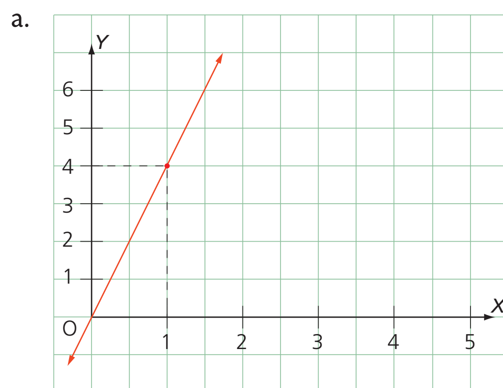


Figura 7

$y = 4x$ $y = -4x$ $y = \frac{1}{2}x$

b.

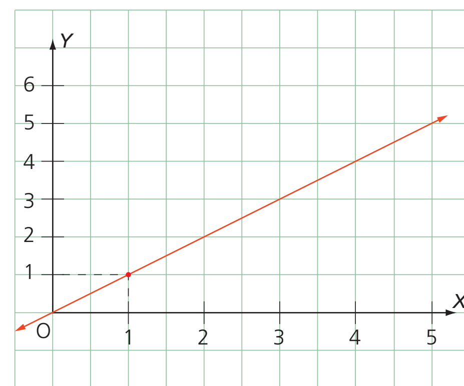


Figura 8

$y = -x$ $y = 2x$ $y = x$

Resolución de problemas



11 Tres kilos de harina de trigo cuestan $ 2,75 y por siete kilos del mismo producto se pagan $ 5,25.

a. Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio que hay que pagar por x kilos de harina de trigo.

b. La expresión que resulta, ¿es una función lineal? Justifica tu respuesta.

c. Calcula cuánto hay que pagar por 5, 10, 25 y 120 kilogramos de trigo.

9 Función afín

Explora

La temperatura de un globo aerostático baja 1 °C por cada 200 m que sube.

- Si al inicio del ascenso marca 16 °C, ¿qué pasará cuando ascienda 0, 200... 800 m?

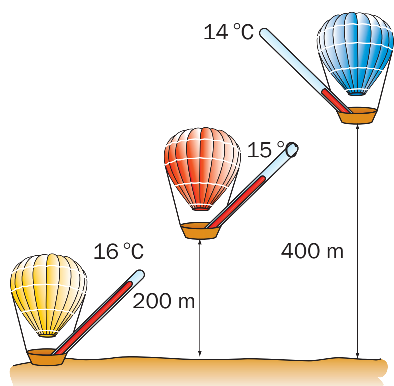


Figura 1

Para saber la temperatura del globo a medida que asciende, se puede construir la Tabla 1 con los valores de la Figura 1.

Altura (m)	0	200	400	600	800
Temperatura (°C)	16	15	14	13	12

Tabla 1

O se podría escribir la relación que hay entre la altura y su temperatura (Tabla 2).

Altura (m)	0	200	400	600	800
Temperatura (°C)	16	$16 - 1$	$16 - 2$	$16 - 3$	$16 - 4$
	16	$16 - \frac{200}{200}$	$16 - \frac{400}{200}$	$16 - \frac{600}{200}$	$16 - \frac{800}{200}$

Tabla 2

Esta relación se puede generalizar mediante el planteamiento de una función.

Las funciones de la forma $y = mx + n$ con m y n números reales se llaman **funciones afines de la función** $y = mx$. Su gráfica corresponde a una línea **recta**.

Ejemplo 1

Para plantear la expresión algebraica de la relación que se plantea en la Tabla 2, se tiene en cuenta una variable y que represente la altura en metros y otra variable x que represente la temperatura en grados centígrados. Así,

$$y = 16 - \frac{x}{200} \text{ o } y = -0{,}005x + 16$$

La Figura 2. representa esta función.

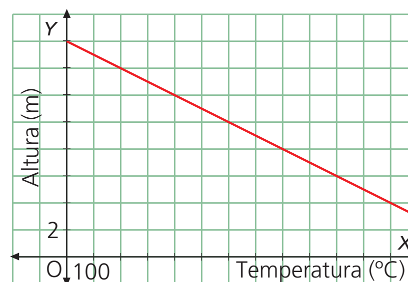


Figura 2

9.1 Caracterización de funciones afines

En las funciones afines $y = mx + n$, m es la **pendiente** de la recta y n es la ordenada para $x = 0$, este punto se llama **ordenada en el origen**.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Representa gráficamente la función $y = 2x + 3$ y determina sus características.

Solución:

a. Se construye una tabla de valores (Tabla 3) y se ubican los pares de valores en un sistema de coordenadas (Figura 3).

b. Al observar la Figura 3 se determina que sus características son:

- Por cada unidad que aumenta la variable x, la variable y aumenta dos.
- La pendiente m en la función $y = 2x + 3$ es 2. Es el coeficiente de x.
- El punto de corte con el eje y es la ordenada de la función para $x = 0$ es decir, $y = 2(0) + 3 = 3$
- La recta interseca al eje y en el punto (0, 3) y el valor 3 coincide con el valor del término independiente.

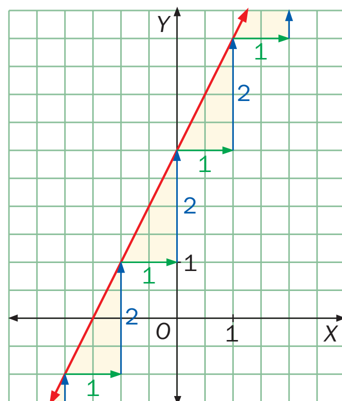


Figura 3

x	−1	0	1	2
$y = 2x + 3$	1	3	5	7

Tabla 3

Destreza con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las siguientes funciones son afines.

a. $y = -5$
b. $y = 0{,}04 + 23x$
c. $y = 1 - x^2$
d. $y = 0{,}3x$
e. $y = -2x^2$
f. $y = -0{,}5x + 2$
g. $y = 3x + 0{,}5$
h. $y = 3 + 6x^2$
i. $y = -9 - 3x$
j. $y = 7 + 4x$

3 Para cada función elabora una tabla de valores.

a. $f(x) = 3x - 7$
b. $g(x) = 0{,}2x + 0{,}6$
c. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
d. $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

Razonamiento

4 Una función viene dada por los valores de la Tabla 4.

x	0	1	2	3
y	10	13	16	19

Tabla 4

Completa a la Tabla 5 teniendo en cuenta la relación entre las variables **x** e **y**. Luego escribe una expresión algebraica que represente esta relación.

x	0	1	2	3
y	10	10 + ...	10 + ...	10 + ...
	10	10 + ... · 1	10 + ... · 2	10 + ... · 3

Tabla 5

5 Determina la pendiente de las siguientes funciones.

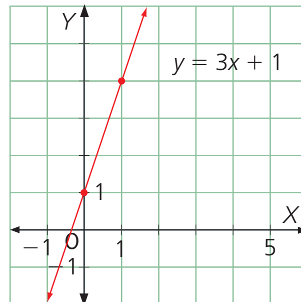


Figura 4

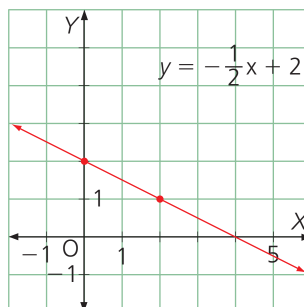


Figura 5

6 Relaciona cada tabla con su ecuación correspondiente.

a.

x	5	−10
y	2	−1

Tabla 6

$y = \frac{-x + 1}{4}$

b.

x	4	8
y	−5	−8

Tabla 7

$y = 0{,}2x + 1$

c.

x	5	−3
y	−1	1

Tabla 8

$y = -\frac{3x}{4} - 2$

7 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones.

a. $y = 3x$
b. $y = 6x - 3$
c. $y = -5x + 2$
d. $y = \frac{1}{2}x + 3$
e. $y = 3x + 1$
f. $y = 0{,}5x - 0{,}6$

Comunicación

8 Escribe la expresión de la función que tiene pendiente 3 y ordenada en el origen −2. Represéntala en un sistema de coordenadas.

Resolución de problemas



9 La función $y=7{,}8x$ establece la relación entre el número de calorías quemadas por una persona de 50 kg de peso y la práctica de la natación durante un tiempo x.

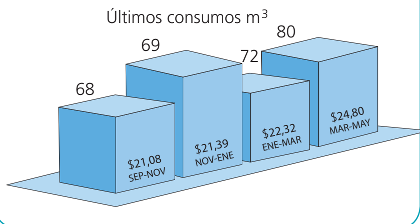
a. Haz la tabla que muestre la relación entre la cantidad de calorías quemadas en diferentes tiempos.
b. Representa la gráfica de la función.
c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
d. ¿Cuál es el punto de corte con el eje Y?
e. ¿Cuál es la pendiente de la función?



10 Representación de funciones lineales y afines

Explora

La factura del consumo de agua relaciona la cantidad de agua consumida en metros cúbicos con su costo. En este caso el valor unitario de cada metro cúbico es $ 0,31.



Los datos de la gráfica se pueden representar mediante la función lineal $y = 0{,}31x$, cuyos valores se pueden tabular así:

Metros cúbicos	1	68	69	72	80
Valor de la factura	0,31	21,08	21,39	22,32	24,80

Tabla 1

Para representar los datos en una gráfica lineal, basta con tomar dos parejas ordenadas, por ejemplo, (1, 0,31) y (69, 21,37), ubicarlas en un sistema de cordenadas y unirlas mediante una línea recta.

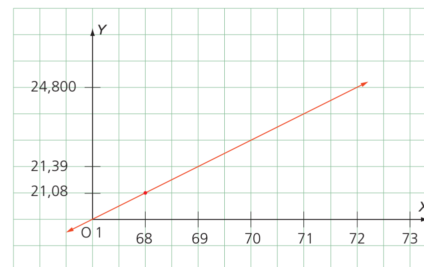


Figura 1

Ten en cuenta

Los Gráficos de bastones son muy similares a los de barras, se recomienda su uso para variables cualitativas o cuantitativas discretas cuando sus respectivas categorías son numerosas.

Puesto que por dos puntos distintos pasa una única recta, para representar una **función lineal** o una **función afín** basta con ubicar dos puntos de la misma y trazar a continuación la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 1

Representa la función afín que tiene por ecuación $y = -3x + 4$.

Se construye la Tabla 2 con un par de valores y se traza la recta que pasa por los puntos obtenidos.

Es conveniente elegir puntos fáciles de calcular, por ejemplo el que tiene $x = 0$.

x	$y = -3x + 4$
0	4
2	−2

Tabla 2

Ten en cuenta

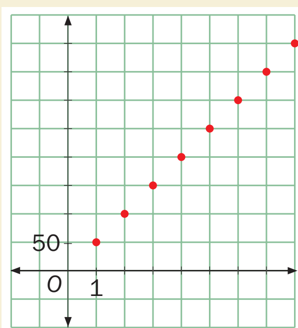


Figura 2

Si la variable independiente sólo toma valores naturales (0, 1, 2, ...), su representación gráfica está dada por puntos alineados que no se deben unir.

10.1 Rectas paralelas

Dos rectas que tienen la misma pendiente son **paralelas** y, recíprocamente, si son paralelas significa que tienen la misma pendiente.

$$m_1 = m_2$$

Ejemplo 2

Representa las funciones $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Se construye una tabla con dos puntos (Tabla 3). Se representan los puntos en el plano cartesiano y se traza la recta (Figura 3).

Observa que las gráficas de las funciones afines de la forma $f(x) = \frac{1}{2}x + n$ representan rectas paralelas a la gráfica de la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}$

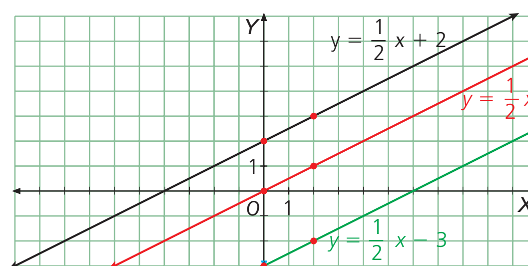


Figura 3

x	$y = \frac{1}{2}x$	$y = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{1}{2}x - 3$
0	0	2	−3
2	1	3	−2

Tabla 3

Destreza con criterios de desempeño: Representar funciones de forma gráfica con barras, bastones y analizar las características de las gráficas.

10.2 Rectas perpendiculares

Dos **rectas** son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Actividad resuelta

Comunicación

1 Escribe la ecuación de una recta paralela y una perpendicular para la función $y = 3x - 2$. Represéntalas.

Solución:

La pendiente de $y = 3x - 2$ es 3. Luego, una recta paralela a ella es $y = 3x$.

Para hallar la ecuación de una recta perpendicular a $y = 3x - 2$, se despeja el valor de m_2 en la ecuación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$$

Entonces $y = -\frac{1}{3}x + 1$ es la ecuación de una recta perpendicular a $y = 3x - 2$.

Hallando algunas parejas ordenadas de valores se realizan las gráficas. Observa la Figura 4.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación



www.e-sm.net/8smt10

Encontrarás algunas herramientas en la web para graficar funciones.

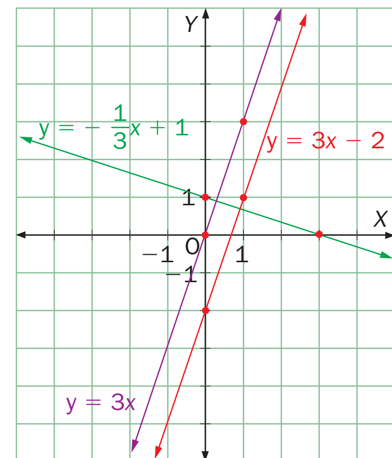


Figura 4

MatemaTICS

Grafica familias de funciones lineales con GeoGebra

Abre el programa GeoGebra.

Usa el botón [botón] para ubicar dos puntos de manera aleatoria sobre el tablero de trabajo.

Ve al botón [botón] y selecciona la opción *Recta que pasa por dos puntos*. Haz clic sobre el punto *A* y luego sobre el punto *B* y hallarás la recta que pasa por ellos.

Selecciona un punto exterior a la recta que acabas de construir y en el botón [botón] elige *Recta perpendicular*.

Describe lo que ocurre luego de hacer clic sobre el punto exterior y luego sobre la recta.

Puedes cambiar el color de la recta, haciendo clic derecho sobre esta y ubicando la opción correspondiente en *Propiedades*.

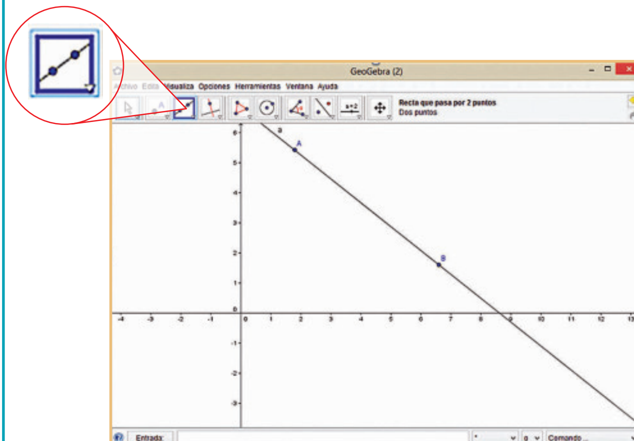


Figura 5

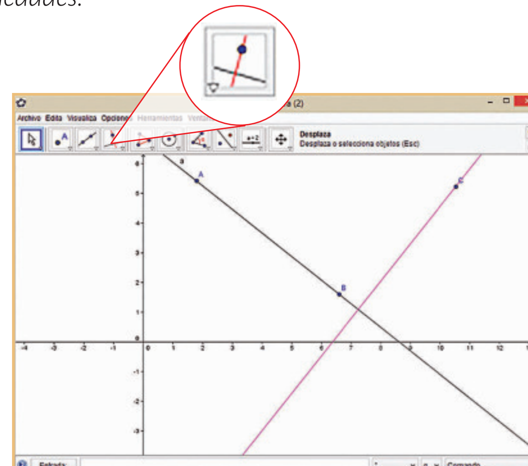


Figura 6

- ¿Cómo son las rectas que acabas de construir?
- Construye otras dos rectas perpendiculares a la recta inicial y determina la relación que existe entre estas.

10 Representación de funciones lineales y afines

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Para cada una de las funciones dadas elabora una tabla de cinco valores y traza la gráfica.

a. $y = 4x$ b. $y = \frac{2}{3}x$

c. $y = -6x$ d. $y = -x$

e. $y = 4x + 1$ f. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

g. $y = 5x - 1$ h. $y = -2x + \frac{2}{3}$

i. $y = 8 - 2x$ j. $y = 5x + 1$

3 Escribe y representa la ecuación de dos rectas que sean paralelas a cada una de las funciones dadas.

a. $y = 2x - 3$ b. $y = 3x$

c. $y = -x + 1$ d. $y = -5x + 7$

4 Halla la ecuación de una línea recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$. Grafica ambas ecuaciones.

5 Escribe y representa la ecuación de dos rectas que sean perpendiculares a cada una de las funciones dadas.

a. $y = 2x + 1$ b. $y = 5x$

c. $y = 3 - x$ d. $y = -x$

6 ¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras?

a. $y = \frac{-3x + 1}{6}$ b. $x + 2y - 3 = 0$

c. $y = -\frac{x}{2}$ d. $y = \frac{1}{2}x + 6$

7 Calcula el valor de la pendiente en la siguiente función lineal: $3y = -6x + 1$.

8 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -4)$ y es paralela a la recta $x + 5y - 3 = 0$.

9 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 6)$ y que es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-4, 0)$ y $(1, -6)$.

10 Halla la ecuación de una línea recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$. Grafica ambas ecuaciones..

11 Encierra el punto que pertenece a la recta $3x + 2y - 4 = 0$.

a. $(0, 2)$ b. $(2, 2)$

c. $(-2, 2)$ d. $(0, -2)$

Comunicación

12 Explica cuáles errores cometió Gonzalo al resolver el ejercicio y corrígelos.

> Nombre: Gonzalo Rodríguez
>
> Une cada función afín con su función lineal correspondiente.
>
> $y = 3x$ → $y = \frac{2}{3}x - 3$
>
> $y = -\frac{1}{5}x$ → $y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$
>
> $y = -5x$ → $y = -5x + 2$
>
> $y = x$ → $y = 1 + 3x$
>
> $y = \frac{1}{3}x$ → $y = \frac{1}{3} + x$

13 Colorea el círculo que hay en frente de cada ecuación con el color que le corresponde a la línea que representa.

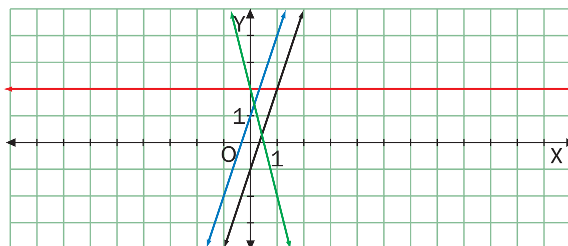


Figura 7

a. $y = -4x + 2$ ◯ b. $y = 3x + 1$ ◯

c. $y = 2$ ◯ d. $y = 3x - 1$ ◯

14 Une cada línea con su ecuación.

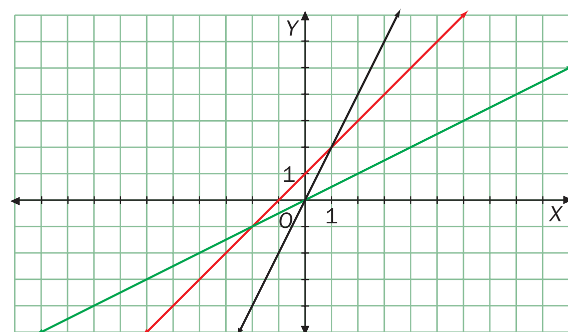


Figura 8

a. $y = \frac{1}{2}x$ b. $y = 2x$ c. $y = x + 1$

Destrezas con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

Razonamiento

15 La gráfica representa la variación de la altura de una planta desde el momento en el que fue sembrada. Analiza la gráfica y determina:

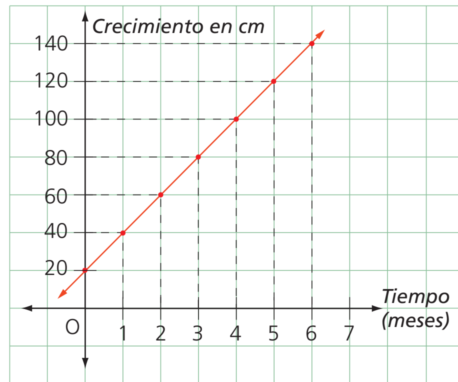


Figura 9

a. El cambio de la altura de la planta cada mes.

b. La altura que tenía la planta a los dos meses y a los cinco meses.

c. La función que expresa la relación entre el tiempo y la altura de la planta.

16 Ten en cuenta las siguientes ecuaciones de funciones afines y lineales.

I) $y = 3x$

II) $y = 4x + 1$

III) $y = 3x + 2$

IV) $y = -2x + 1$

Luego, responde:

a. ¿Cuáles son paralelas entre sí?

b. ¿Cuál es decreciente?

c. ¿Cuál pasa por el origen?

d. ¿Cuál es más inclinada?

e. ¿Cuáles tienen la misma ordenada en el origen?

17 Dadas las rectas L1: $y = Kx - 3$ y L2: $y = 2x - 4K$, determina el valor de K para que L1 sea paralela a L2.

18 ¿Están alineados los puntos $(-1, 7)$, $(2, -5)$ y $(0, 3)$? ¿Cómo llegaste a esta conclusión?

19 Halla la ecuación de la recta paralela a $y = \dfrac{-x + 1}{5}$ que pasa por el punto $A(-3, 4)$.

20 ¿Pertenece el punto $(2, 3)$ a la recta de ecuación $y = 2x - 1$? ¿Por qué?

Resolución de problemas



21 Un ciclista parte del kilómetro 10 de una carretera a una velocidad constante de 20 kilómetros por hora.

a. Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el punto kilométrico de la carretera con el tiempo transcurrido desde el inicio.

b. Representa la función.

22 Se realizó una campaña de vacunación en un país africano. Los gastos de distribución son \$ 600 y los gastos de vacunación son \$ 5 por cada vacuna puesta.

a. Determina la expresión algebraica de esta función.

b. Representa la función.

23 Una frutería ubica en el escaparate una oferta de naranjas por kilos y otra por bolsas.



a. Representa la gráfica de la función que relaciona el número de kilos de naranjas comprados y el precio de la compra.

b. Grafica la función que relaciona el número de bolsas de naranjas compradas y el precio de la compra.

24 Una motocicleta se desplaza a una velocidad constante de 35 km/h.

a. Escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el espacio recorrido.

b. ¿De qué tipo es? Obtén su gráfica.

c. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 245 km?

25 Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.

a. Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).

b. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

c. ¿Cuál será el nivel del agua a los 15 minutos?

d. ¿Cuánto tardará el estanque en vaciarse?

11 Aplicaciones de las funciones lineales y afines

Explora

Para pasar de grados Fahrenheit (°F) a grados centígrados (°C) se aplica la siguiente fórmula:

$$°C = \frac{(°F - 32) \cdot 5}{9}$$

Es decir,

$$f(x) = \frac{(x - 32) \cdot 5}{9}$$

- Según lo anterior, ¿cuántos grados centígrados equivalen a 18 grados Fahrenheit?

Para calcular la equivalencia que hay entre el número de grados centígrados y el de grados Fahrencheit, se sustituye x por 18 °F en la función, entonces:

$$f(18) = \frac{(18 - 32) \cdot 5}{9} \approx -7{,}8\ °C$$

En la Figura 1 se observa la representación gráfica de la función.

Como se evidencia, el estudio de las funciones ha sido de vital importancia al momento de registrar, analizar y precalcular valores relacionados con diferentes fenómenos de la cotidianidad.

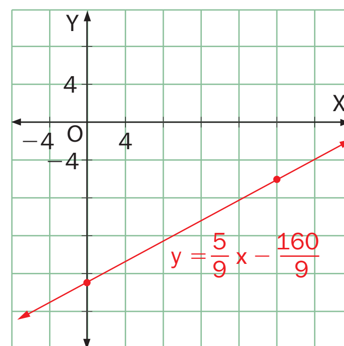


Figura 1

Las funciones de la forma:

y = (parte proporcional) + (parte fija)

son funciones afines, cuya expresión es $y = mx + n$, donde mx es la parte proporcional y n es la parte fija. Tienen muchas aplicaciones en ciencias, economía, medicina, física, geología y astronomía.

11.1 Ejemplo de aplicaciones en las ciencias

Muchas ciencias se valen de funciones afines y lineales en la modelación y análisis de comportamientos como la velocidad de los objetos, la medida de distancias o el crecimiento proporcional de un elemento, entre otras.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Dos ciudades A y B están a una distancia de 227,5 km. Si un carro rojo parte de la ciudad A hacia la ciudad B, con una velocidad de 40 km/h, y al mismo tiempo parte un carro verde de la ciudad B hacia la ciudad A con una velocidad de 25 km/h, ¿en qué lugar se cruzan los dos carros? ¿Cuánto tiempo emplean?

Solución:

- Se puede representar la información en una gráfica en la que se muestre la velocidad de los dos autos, tal como en la Figura 2 En este caso se observa que la ecuación $y = 40t$ representa la velocidad del carro rojo y la ecuación $y = -25t + 227{,}5$ representa la velocidad del carro verde. Observa que esta última ecuación corresponde a una función afín y la primera a una lineal. Esto se debe a que el segundo carro viaja en dirección contraria (por ello el signo negativo) y parte a 227,5 km del punto de referencia (la ciudad A).
- Para determinar con exactitud el tiempo en el que se cruzan, se igualan las ecuaciones que representan las velocidades de los autos.

$$40t = -25t + 227{,}5 \qquad t = \frac{227{,}5}{65} \qquad t = 3{,}5$$

Al reemplazar $t = 3{,}5$ en la ecuación $y = 40t$, se tiene que $y = 140$. Luego se concluye que los carros se cruzan a las tres horas y media a una distancia de 140 km de la ciudad A.

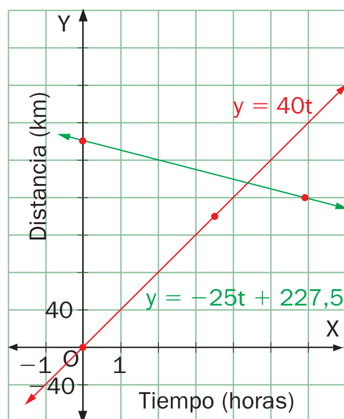


Figura 2

Ten en cuenta

- La velocidad se expresa como la razón de cambio de la distancia en un intervalo de tiempo: $v = \frac{d}{t}$.
- Así, la distancia se puede expresar como el producto de la velocidad y el tiempo: $d = v \cdot t$.

Destrezas con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

11.2 Ejemplo de aplicaciones en la economía

En economía se modelan funciones como costos, utilidades, demanda, ofecta, etc.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 Para revelar e imprimir las fotos de una cámara digital se pagan $ 2 000 por el procesado de la tarjeta de memoria, y un costo adicional de $ 250 por foto.

a. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?

b. Representa gráficamente la función. ¿Se pueden unir los puntos?

Solución:

a. Si x es el número de fotos e y es el costo, la ecuación de la función es $y = 250x + 2\,000$.

b. No se pueden unir los puntos, puesto que no tendría sentido revelar, por ejemplo, 2,3 fotos.

CULTURA del Buen Vivir

El compromiso

Formular y llevar a cabalidad un compromiso necesita de un proceso de planeación y cumplimiento.

- ¿Cómo crees que el pensamiento matemático te ayuda a buscar y seguir procesos que te permitan cumplir tus metas?

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Observa la Figura 3 y propón la situación que se relaciona con la información que se presenta en ella.

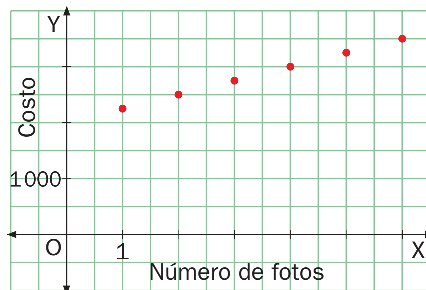


Figura 3

- Indica la fórmula de la función de cada tramo.

Modelación

4 En la Tabla 1 se relaciona el volumen de los cilindros de 10 cm de altura con el radio de su base.

x	10	20	30	40
y	0	30	60	90

Tabla 1

a. Halla la ecuación de la relación.

b. Construye la gráfica de la función que relaciona los datos de la tabla.

5 A un tanque que contiene 150 L de gas propano se le inyecta del mismo gas a razón de 3 L por segundo. Determina la función que relaciona las dos variables mencionadas y calcula el contenido del tanque a los 10 s de iniciar la inyección del gas.

Razonamiento

6 Observa la Figura 4

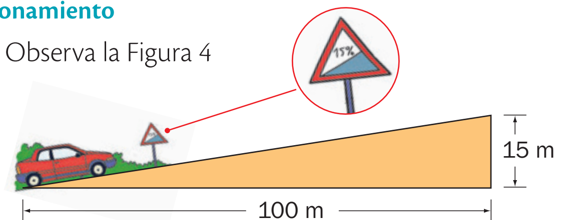


Figura 4

a. Calcula la pendiente de la recta sobre la que está ubicada la carretera por la que asciende el auto.

b. Explica el significado de la señal de tráfico que aparece en la carretera.

Resolución de problemas

7 Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un salario fijo de $ 75 al mes y, además, $ 15 por ejemplar vendido.

a. Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero recibido al mes.

b. ¿Es una función afín o lineal?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente?

d. ¿Cuál es el término independiente?

e. ¿Cuántos ejemplares tiene que vender un repartidor para cobrar en un mes $ 555?

8 Plantea un problema que se solucione con cada función.

a. $y = 40x + 10$

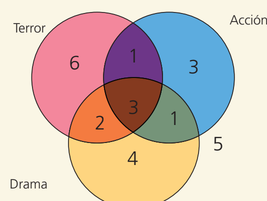
b. $y = 5x + 20$

Prueba Ser Estudiante



A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

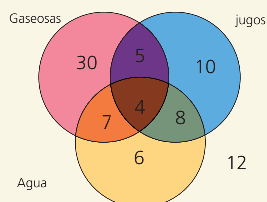
1. El diagrama representa los estudiantes de un curso dividido en conjuntos según el tipo de películas que prefieren ver. El número de estudiantes que les gusta las películas de acción, las de terror o las dos son:



A. 1 B. 3

C. 9 D. 10

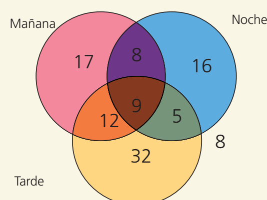
2. El diagrama representa los invitados a una fiesta y lo que bebieron durante ella, el número de personas que solo tomaron dos tipos de bebidas son:



A. 24 B. 20

C. 15 D. 9

3. El diagrama representa las personas que viven en un edificio y cuándo estuvieron fuera de su departamento el fin de semana, el número de personas más de dos veces en el día son:



A. 25 B. 29

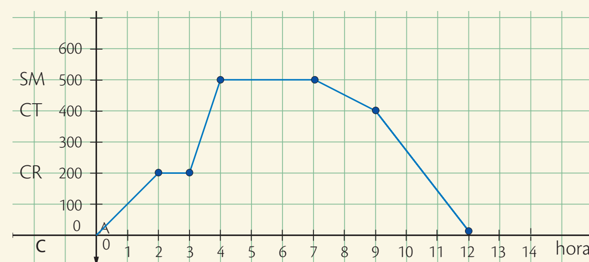
C. 34 D. 17

4. La velocidad del sonido aumenta según la función $v = 340 + 0{,}4T$, donde 340 m/s es la velocidad a la que se mueve e sonido a 0°C y T es la temperatura a la que nos encontramos. La velocidad del sonido cuando la temperatura del medio es de 20°C es:

A. 360 m/s B. 344 m/s

C. 348 m/s D. 380 m/s

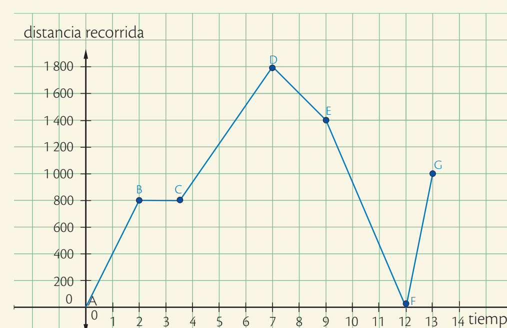
5. La gráfica muestra el camino que siguió Paúl un lunes por la mañana, las distancias entre la casa de Roberto CR y el supermercado SM y entre la casa de Roberto y la casa de Tatiana son respectivamente:



A. 500m, 100m B. 400m, 300m

C. 300m, 200m D. 200m, 300m

6. La gráfica indica el recorrido de un ciclista, la distancia total recorrida por él es:



A. 5 400 B. 4 600

C. 3 600 D. 2 800

7. Dos rectas son paralelas si:

A. $m_1 = - m_2$

B. $m_1 = m_2$

C. $m_1 - m_2 = 1$

D. $m_1 \cdot m_2 = -1$

Indicadores de logro:

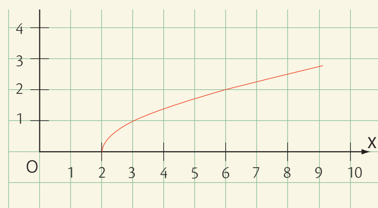
- Representa en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos.
- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.
- Determina el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología,
- Analiza las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones)
- Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal.

8. Una función lineal es creciente cuando:

A. $m > 0$ B. $m < 0$

C. $m = 0$ D. $m = \infty$

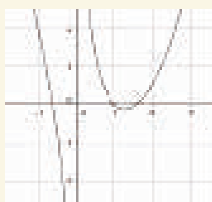
9. Para la función de la figura, el dominio es:



A. $]2, 9]$ B. $]2, +\infty[$

C. $[2, 9[$ D. $[2 + \infty[$

10. El dominio de la gráfica es:



A. $]2, 9]$ B. $]2, +\infty[$

C. $[2, 9[$ D. $[2 + \infty[$

11. De las ecuaciones: a) $y = 2x + 1$, b) $y = 7 - x$, c) $y = \frac{8}{3}x - 2$, d) $y = -\frac{7}{2}$, la recta más inclinada es:

A. a B. b

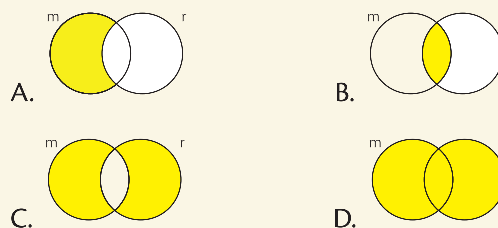
C. c D. d

12. El punto que pertenece a la recta $y = -3x + 5$ es:

A. $(-3, 4)$ B. $(4, 3)$

C. $(3, -4)$ D. $(-4, -3)$

13. La proposición: "ningún mamífero puede ser reptil" se representa gráficamente con:

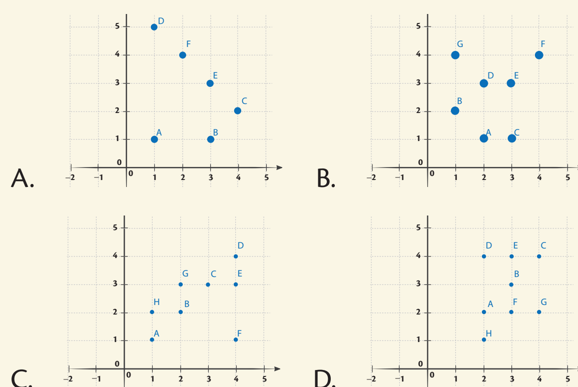


14. Siendo los conjuntos A={a,b,c} y B={2,4,6}. Son elementos del producto cartesiano BxA

A. (a, 2), (b, 6) B. (c, b), (b, c)

C. (2, a), (c, 6) D. (4, c), (6, a)

15. De los diagramas propuestos para el conjunto A={1, 2, 3, 4}, corresponde a una relación reflexiva en A:



16. Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5} y la relación en A dada por los elementos:
{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1).
Determina que propiedades cumplen los elementos de la relación

A. Reflexiva, simétrica y transitiva

B. Reflexiva y simétrica

C. Simétrica y transitiva

D. Reflexiva y transitiva

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Ahorrar, es pensar en el futuro

1 Su historia

Desde tiempos remotos ya se tenía el concepto de ahorro y se practicaba en los pueblos de la antigüedad. Civilizaciones como la Egipcia, la China, y la Inca, etc. acostumbraban a guardar el fruto de sus cosechas.

A mediados del siglo XVI aparecieron en España los llamados "Montes de piedad" que fueron una iniciativa de los franciscanos para cuidar el dinero de los pobres y concederles préstamos gratuitos y sin interés.



2 Su definición

El ahorro es la parte de los ingresos de las familias, empresas y el gobierno que no son consumidos inmediatamente. También es definido como la diferencia entre el ingreso disponible y el consumo efectuado.

El concepto de ahorro es fácil de visualizar en el caso de las familias. En el caso de las empresas el ahorro es la parte de los beneficios que no se reparte en forma de dividendos y que se acumula como fondos de reserva.

3 Su importancia

Ahorrar ahora es preparar una reserva para el futuro.

Con el ahorro se provee una suficiencia económica que permite contar con un capital, que por pequeño que sea, puede cubrir compromisos futuros como son: la educación de los hijos, cubrir los gastos de unas vacaciones y viajar, la posibilidad de comprar una casa, la opción de cubrir emergencias médicas o de otro tipo, entre otras situaciones.

Ahorrar es reservar algo valioso para utilizarlo en el futuro.

Esta frase tan sencilla describe los elementos clave de toda actividad de ahorro: **disciplina, sacrificio y planificación para el futuro**

Desarrolla tus destrezas

Trabajo en grupo

Administración de recursos

1. Investiguen diferentes tipos de cuentas de ahorro que se han diseñado para los jóvenes. Lean los requisitos para abrir estas cuentas.
2. Elaboren un listado en el cual discriminen en qué cosas gastan y cuánto gastan en cada una. Analicen cuidadosamente la lista y determinen en qué aspecto es posible que ahorren.
3. Lean los comentarios de Sebastián Vettel acerca de su cultura del ahorro.



Sebastián Vettel, llamado "niño prodigio" de la Fórmula 1 de Automovilismo, en entrevista a la revista "Bocas", explica así su fama de "ahorrador": "Mi padre era ebanista y me enseñó el valor del trabajo. Además, soy alemán ¡y debo ser ahorrador! No me compro yates. Vengo de una familia humilde, sé lo que cuestan las cosas y no me despego de la calle. No pierdo el contacto con mis amigos y conozco los problemas de la juventud y lo dura que está la vida".

Adaptado de: www.elmundo.com/portal/opinion/editorial/la_cultura_del_ahorro.php#.VbazxUJ_NBc

Tipos de ahorro

La forma en la que se guarda el dinero determina el tipo de ahorro; este se puede clasificar en ahorro formal y ahorro informal.

Ahorro informal

Consiste en dejar el dinero ahorrado fuera de entidades financieras autorizadas. Esta forma de ahorro es muy utilizada pero presenta algunos riesgos:

- Puede perderse.
- Puede deteriorarse.
- Puede ser robado.
- No genera rendimiento o interés alguno.

Ahorro formal

Consiste en canalizar el dinero ahorrado hacia entidades financieras autorizadas.

Cuando se deposita el dinero en una entidad financiera, ésta se responsabiliza de la custodia de los fondos depositados, preservando la posibilidad de disponer de ellos.

Los bancos ofrecen opciones de ahorro como:

- Cuenta de ahorro
- Cuenta corriente
- CDT
- Fiducia



TIPS para ahorrar dinero

- ✔ Valida en qué gastas.
- ✔ Elimina gastos innecesarios.
- ✔ Paga tus deudas.
- ✔ Compara y elige.
- ✔ Reduce el consumo de servicios en casa.

La palabra ***alcancía*** viene del árabe kanziya, palabra de género femenino que significa "La del Tesoro Escondido".

Desde la antigüedad el cerdo se ha considerado símbolo de prosperidad y abundancia; en antiguas culturas Europeas reservaban un cerdo por si debían venderlo en caso de necesidad y esto era para ellos una especie de seguro para emergencias.

Pregunta tipo Saber

Observa la cantidad de dinero que ha ahorrado Fernando en los últimos meses:



Mes	Valor
Febrero	$ 250
Marzo	$ 125
Abril	$ 245
Mayo	$ 197

Por el tipo de ahorro que hace Fernando sabe que si ahorra más de $ 150 en un mes su rentabilidad será del 2,5%; en caso contrario su rentabilidad será del 2%.

Teniendo en cuenta esta información, se puede afirmar que Fernando:

A. Recibió en el mes de abril mas de $ 7 de rendimientos.

B. Ganó en el mes de febrero $ 6,25 por su ahorro.

C. Recibió en el mes de mayo más de $ 10 de rendimientos por su ahorro.

D. Ahorró en los cuatro meses alrededor de $1 000.

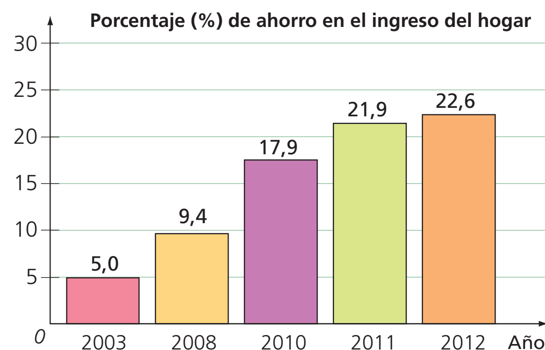
4. Investiguen qué otros personajes de la vida pública tienen fama de "ahorradores"

5. Observen la gráfica de barras de la derecha. Ella, muestra el porcentaje de ahorro en Ecuador.

6. Interpreten los resultados dados en la gráfica. Escriban un párrafo en el que planteen sus conclusiones.

7. Escriban su opinión sobre la siguiente afirmación:

"En la actualidad los hogares ecuatorianos, en promedio, ahorran una cuarta parte de su ingreso, lo cual corresponde a casi cinco veces lo que ahorraban en 2003"



Habilidades digitales

Construye una WebQuest con Zunal

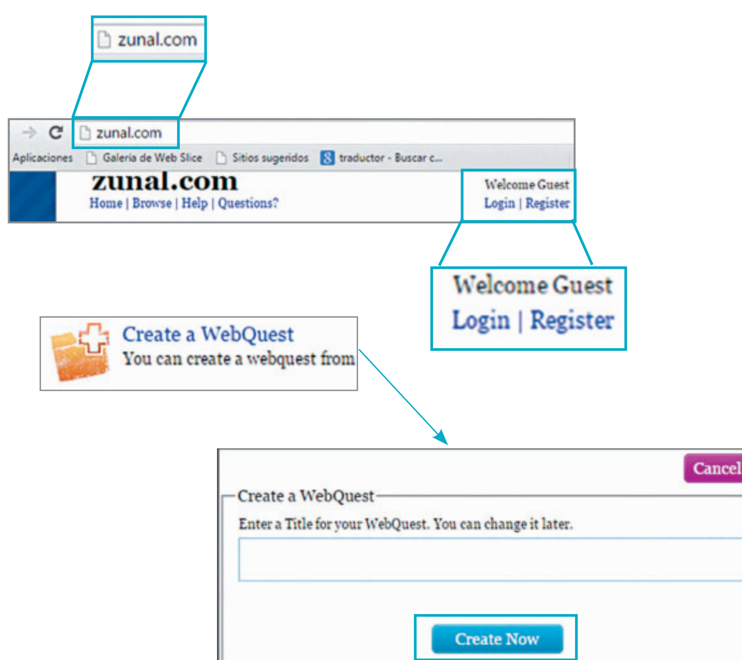
Buscar información confiable y organizarla en forma de WebQuest promueve el aprendizaje guiado. Zunal es una herramienta para diseñar WebQuest, que consiste en presentar un problema interesante para resolver, a partir de un grupo de recursos de la web establecidos previamente por el autor. Ahora aprenderás a elaborar una WebQuest en Zunal.com.

1 Abre una cuenta en Zunal

a. Ve al link **http://zunal.com/**, da clic sobre “Register” y crea una cuenta. Para ello, diligencia los datos solicitados y oprime el botón “Create Account”.

b. Ingresa con tu usuario y contraseña y luego da clic sobre “Login”.

c. Da clic sobre el link “Create a WebQuest”, después sobre el botón “Create a new Webquest from scratch”,. Luego asigna un título llamativo a tu webquest, oprime “Create now” y finalmente da clic en “Continue”.



2 Reconoce el entorno y diseño de las webquest en Zunal.

1. Barra de exploración
2.. Encabezado
3. Zona de trabajo y recursos



3 Crea tu propia WebQuest

a. Realiza una búsqueda de información confiable en internet (textos, imágenes, videos, documentos) sobre aplicaciones de las funciones lineales y cuadráticas en actividades humanas. Piensa y escribe un interrogante interesante a resolver relacionado con tu búsqueda.

b. Edita la pestaña "Welcome así:

- Da clic sobre la pestaña "Welcome" en la barra de exploración
- Oprime el botón "Update WebQuest information".
- Diligencie el formulario, oprime "Save now" y luego "Saved, Please Continue".
- En la zona de trabajo y recursos, da clic sobre el botón "Update Image", selecciona una imagen relacionada con tu WebQuest en tu computador y oprime "Save now" y luego "Continue".

c. Edita las demás pestañas siguiendo el proceso anterior. Ten en cuenta que cada pestaña cumple una función diferente:

Welcome: Resumen detallado de tu webquest
Introduction: Texto que habla sobre la importancia del problema.
Task: Conjunto de tareas que se deben desarrollar..
Process: Paso a paso que se debe seguir para cumplir las tareas
Evaluation: Preguntas de autoevaluación de rendimiento.
Conclusion: Solución del problema e invitación a explorar otros.

4 Revisa tu WebQuest en vista previa.

- En el encabezado, da clic sobre el botón "Preview Mode".

5 Comparte tu WebQuest

- En la barra de exploración oprime el botón **Share This WebQuest** y selecciona la opción "Share This WebQuest via Email". Allí debes diligenciar los datos solicitados y luego dar clic sobre "Send now".



Aprende más

Incluye un video de YouTube como recurso.

a. Ve a la pestaña "Process".

b. En la zona de trabajo da clic en "Add Resources" y en "Add a video from www.youtube.com"

c. Diligencia los datos solicitados, oprime "Save now" y luego "Continue".

Evaluación de la Unidad



Conjuntos

Comunicación

1. Completa las expresiones, si sabes que:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

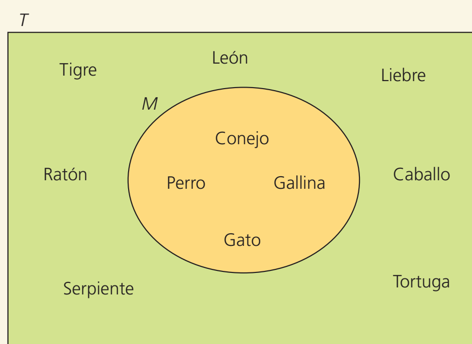
a. $A \cup B = \{1, 2, \square, 4, \square, \square, 8, \square\}$

b. $A \cap B = \{\square, \square, \square\}$

c. $A - B = \{\square, \square, \square\}$

d. $B - A = \{\square, \square\}$.

2. Observa el siguiente diagrama de Venn y escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda.



a. T es un subconjunto de M ( )

b. M es un subconjunto de T ( )

c. El elemento Caballo pertenece a M ( )

d. El elemento Conejo pertenece a T ( )

Resolución de problemas

Selecciona la respuesta correcta para las actividades 3 al 6.

3. En un curso de 40 estudiantes, quince deben presentar la evaluación de matemáticas, quince deben presentar la evaluación de sociales y diez deben presentar las dos evaluaciones. Los demás no presentan ninguna evaluación. ¿Cuántos estudiantes no tienen que presentar ninguna evaluación?

a. 10 estudiantes

b. 15 estudiantes

c. 20 estudiantes

d. 25 estudiantes

4. En una encuesta realizada a 135 estudiantes de un colegio, se obtuvieron los siguientes resultados: 60 prefieren la clase de matemáticas, 85 prefieren la de inglés, 80 prefieren la de química, 30 estudiantes prefieren las clases de matemáticas e inglés, 20 prefieren química e inglés, 10 estudiantes prefieren matemáticas y química, y a 15 estudiantes les gustan las tres clases. ¿A cuántos estudiantes les gusta una sola clase?

a. 50 estudiantes b. 60 estudiantes

c. 70 estudiantes d. 80 estudiantes

5. En un jardín de niños, 18 juegan fútbol y baloncesto, y solamente cuatro juegan baloncesto. Si hay un total de 30 niños, ¿cuántos de ellos juegan solo fútbol?

a. 8 b.18

c. 4 d.14.

6. A treinta habitantes del barrio La Estrella les gusta ir al teatro y al cine, 90 prefieren ir al teatro, 100 prefieren ir al cine y 140 prefieren otras actividades diferentes. ¿Cuántos habitantes del barrio La Estrella fueron encuestados?

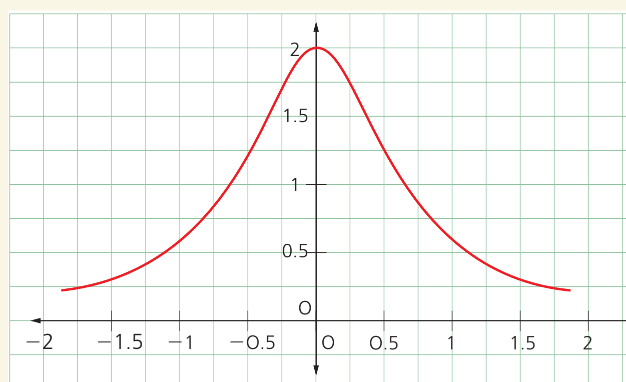
a. 200 b. 250

c. 300 d. 360

Funciones

Razonamiento

7. Con base en la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 0{,}5}$, establece si las afirmaciones son correctas o no.



a. El $D_f = \mathbb{R}$ ( )

b. El $D_f = (0, 2]$ ( )

c. La imagen de $x_1 = -2$ es mayor que la imagen de $x_2 = 2$. ( )

d. La intersección de la función con el eje y es (2, 0). ( )

e. La gráfica de la función cortará al eje x en dos puntos. ( )

Indicadores de logro:

- Representa en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos.
- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.
- Determina el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología,
- Analiza las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones).
- Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal.

Continuidad y variación de funciones

Comunicación

8. Determina la variación del intervalo $[-3, 3]$ en la función $f(x) = x^2 - 9$. ¿Es correcto afirmar que la variación es nula? ¿Por qué ocurre? Explica tu respuesta.

Crecimiento y decrecimiento de funciones

Razonamiento

9. Responde las preguntas con base en la información de la Figura. En ella se representa la distancia recorrida (metros) por un vehículo con respecto al tiempo (min).



a. ¿Qué movimiento realizó en el intervalo [2, 5]?

b. ¿Qué movimiento realizó en el intervalo [8, 14]?

c. En total, ¿cuánta distancia recorrió?

d. Determina el máximo relativo.

Función lineal

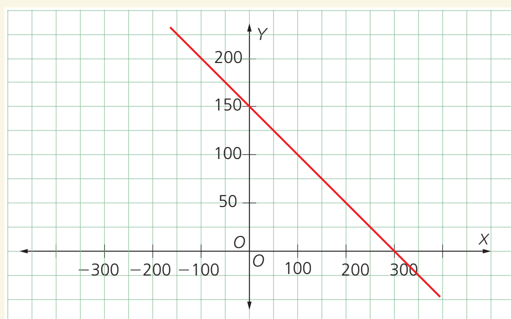
Modelación

10. Determina una expresión para calcular el dinero que se recibe por el ingreso a una piscina si cada deportista debe pagar $ 45. ¿Cuánto dinero se recolectó si a la piscina ingresaron 83 personas?

Función afín

Ejercitación

11. Determina la expresión de la recta que se representa en el siguiente plano cartesiano. Compara tu respuesta con la que obtuvieron tus compañeros.



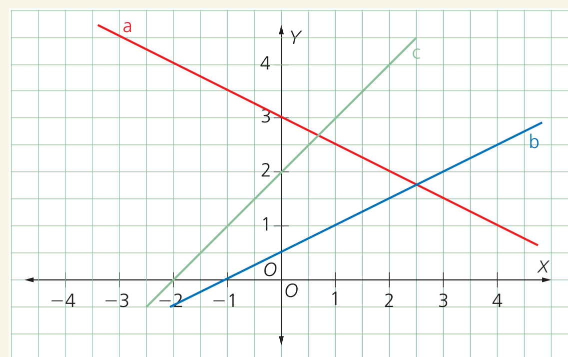
Modelación

12. Traza la gráfica de una función que sea decreciente en $(-\infty, -2]$ unido a $[3, \infty)$, creciente en $(-2, 3)$, e indeterminada en el punto (0,0).

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Razonamiento

13. Relaciona cada expresión con la ecuación de la recta según corresponda a la información de la Figura.



a. Ecuación de la recta paralela a la recta *a* que pasa por el punto (0,1).	• $y = -x$
b. Ecuación de la recta perpendicular a la recta *c* que pasa por (0,0).	• $y = -x - 1$
c. Ecuación de la recta paralela a la recta *b* que pasa por (0,0).	• $y = -\frac{1}{2}x + 1$
d. Ecuación de la recta perpendicular a la recta *a* que pasa por (0,1).	• $y = \frac{1}{2}x$
e. Ecuación de la recta perpendicular a la recta *c* que pasa por (0,−1).	• $y = 2x + 1$

Aplicaciones de las funciones lineales y afines

Modelación

14. Establece una expresión para que un conductor de transporte público determine el precio a cobrar si el pasaje cuesta $ 0,1 5.

Resolución de problemas

15. En un granero se depositan 900 kg de trigo y cada día se utilizan 90 g. Escribe una función que represente la situación. Determina para cuántos días alcanzará el aprovisionamiento de trigo.

5 BLOQUE

Geometría y medida

Geometría y medida

Los movimientos geométricos, como las traslaciones, giros y reflexiones, han sido utilizados por la humanidad en campos como la ingeniería, la arquitectura y las diferentes manifestaciones artísticas.

- Haz una lista de al menos cinco edificios u obras públicas que tengan un algo grado de simetría.



Cultura del Buen Vivir

La armonía

Una persona con un carácter armonioso puede adaptarse con facilidad a las distintas manera de pensar, actuar, sentir y actuar de otras personas.

- Explica por qué es importante conservar la armonía cuando se es parte de un grupo social.

Aprenderás...

- Triángulos y cuadriláteros
- Circunferencia y círculo
- Cuerpos geométricos
- Áreas de polígonos

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC
AI
E



Habilidades lectoras

¿Qué es un mandala?

El mandala, palabra sánscrita cuyo significado literal es círculo, es una representación simbólica y arquetípica del universo según la antigua cosmología budista. Está constituido por un conjunto de figuras y formas geométricas concéntricas y representa las características más importantes del universo y de sus contenidos. Su principal objetivo es fomentar la concentración de la energía en un solo punto durante la meditación.

Los mandalas son utilizados desde tiempos remotos. Tienen su origen ancestral en la India (imágenes y meditaciones budistas) pero pronto se propagaron en las culturas orientales y entre los indígenas de América y Australia. La mayoría de las culturas poseen configuraciones mandálicas, frecuentemente con intención espiritual: la “mandorla” –almendra– del arte cristiano medieval, ciertos “laberintos” en el pavimento de las iglesias góticas y los rosetones de vitral de las mismas iglesias góticas, entre otros.

En la cultura occidental, fue Carl G. Jüng (1875-1961) quien los utilizó en terapias con el objetivo de alcanzar la búsqueda de individualidad en los seres humanos. Jüng solía interpretar sus sueños dibujando un mandala diariamente. En esta actividad descubrió la relación que estos tenían con su centro y a partir de allí elaboró una teoría sobre la estructura de la *psique* humana.

Según Carl Jüng “los mandalas representan la totalidad de la mente, abarcando tanto el consciente como el inconsciente”. Afirmó que el arquetipo de estos dibujos se encuentra anclado en el subconsciente colectivo.

Montiel, Ana. Perez, María y Rodriguez, Beatriz. (Consultado en Octubre 2015). Los mandalas como instrumento educativo. Recuperado de: http://comunidad-escolar.pntic.mec.es/796/experi.html

Actividades

Interpreta

1. Identifica las formas geométricas utilizadas en las mandalas de la fotografía. ¿Qué tipo de simetría suelen presentar?

Argumenta

2. Averigua el origen de la palabra “mandala” e investiga en qué culturas son más utilizados.

Propón

3. Busca objetos a tu alrededor que tengan decoración realizada con mandalas. Fotografíalos y preséntalos en clase.

1 Triángulos

Explora

Observa el triángulo de la Figura 1

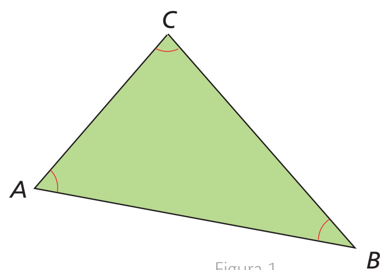


Figura 1

- Describe los elementos básicos que definen este triángulo.

En el $\triangle ABC$ se identifican los siguientes elementos.

- Los puntos de intersección *A*, *B* y *C* de los segmentos son los **vértices** del triángulo.
- Los tres **segmentos** son los lados del triángulo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- Cada par de lados determinan los **ángulos interiores** $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.

El **triángulo** *ABC* es el conjunto formado por tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ que unen, respectivamente, tres puntos *A*, *B*, *C* no colineales. Estos dividen el plano en tres subconjuntos: el interior del triángulo, el exterior del triángulo y el mismo triángulo.

1.1 Clasificación de triángulos

Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según la medida de sus ángulos, como se observa en la Tabla 1.

Clasificación de triángulos	
Según la longitud de sus lados	Según la amplitud de sus ángulos
Equilátero: sus tres lados son congruentes. Figura 2	**Acutángulo:** sus tres ángulos son agudos. Figura 3
Isósceles: tiene un par de lados congruentes. Figura 4	**Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso. Figura 5
Escaleno: sus tres lados tienen diferente longitud. Figura 6	**Rectángulo:** uno de sus ángulos es recto. Figura 7

Tabla 1

Ejemplo 1

El triángulo de la Figura 8 tiene sus tres ángulos congruentes.

Ese tipo de triángulo se conoce como **equiangular.**

Todo triángulo equiangular es acutángulo.

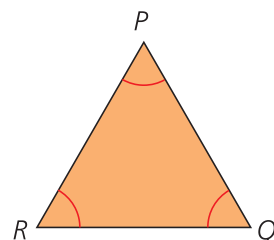


Figura 8

CULTURA del Buen Vivir

La armonía

Vivir en armonía es poder establecer un equilibrio entre lo material y lo espiritual. Es tener un balance exacto entre los diferentes aspectos de la vida humana.

- Para los platónicos, el triángulo equilátero estaba asociado con esta noción de la armonía . ¿Por qué crees que eligieron esta figura?

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás dadas condiciones sobre ciertas medidas de lados y/o ángulos.

Ejemplo 2

El triángulo de la Figura 9 tiene un ángulo de 100°. ¿Qué clase de triángulo es?

El triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es isósceles. Además tiene un ángulo de 100°, entonces es obtusángulo.

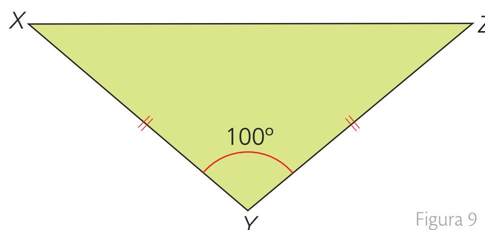


Figura 9

1.2 Construcción de triángulos

En la construcción geométrica de triángulos se utilizan instrumentos tales como la regla, el compás y el transportador. A continuación se presenta el paso a paso para que aprendas a construir triángulos a partir de diferentes características.

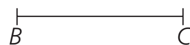
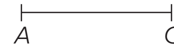
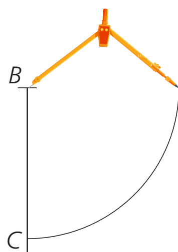
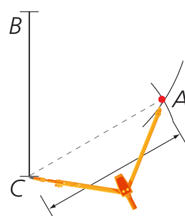
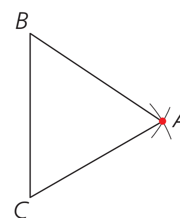
Conociendo los tres lados		
Dados los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo:  Figura 10	 Figura 11	 Figura 12
1. Se traza un segmento con la medida de cualquiera de los lados, por ejemplo $\overline{BC}$. Con centro en *B* se dibuja un arco con una abertura igual a la medida del $\overline{AB}$.  Figura 13	**2.** Se traza otro arco con centro en *C* y una abertura igual a la longitud de $\overline{AC}$ que interseque al arco anterior en el punto *A*.  Figura 14	**3.** Se trazan los dos lados desde los extremos de $\overline{BC}$ hasta el punto *A*.  Figura 15

Tabla 2

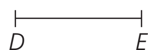
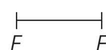
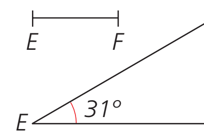
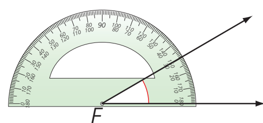
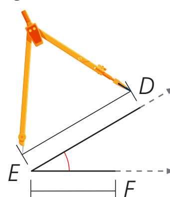
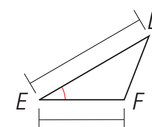
Conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos		
Dados los segmentos *DE* y *EF* y el ángulo con vértice *E*, tal que $m\measuredangle E = 31°$:  Figura 16	 Figura 17	 Figura 18
1. Con el transportador se construye el ángulo conocido.  Figura 19	**2.** Usando el compás se trasladan los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, haciéndolos coincidir con los rayos del ángulo.  Figura 20	**3.** Se traza el tercer lado uniendo los puntos *D* y *F*.  Figura 21

Tabla 3

1 Triángulos

Conociendo dos ángulos y el lado común

Dados ∡*B* y ∡*C*, y un lado *a* común a ellos:

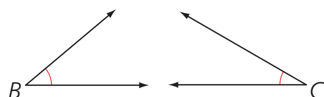


Figura 22

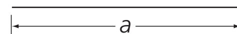


Figura 23

1. Se traza uno de los ángulos conocidos. Por ejemplo, ∡*B*, y sobre uno de sus lados se mide la longitud de *a*.

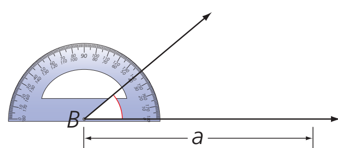


Figura 24

2. En el otro extremo de *a* se traza el ángulo *C*.

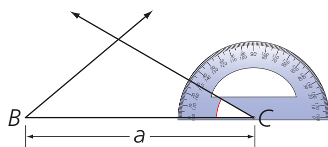


Figura 25

3. El punto de intersección de los lados no comunes del ∡*B* y ∡*C* es el vértice *A* del triángulo *ABC*.

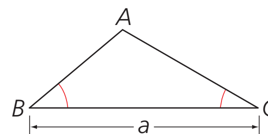


Figura 26

Actividades resueltas

Comunicación

1 Construye un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 4 cm y 5 cm.

Solución:

Para construir el triángulo solicitado se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza el $\overline{AB}$ de longitud 5 cm. Con centro en *A* se dibuja un arco con abertura de 4 cm.

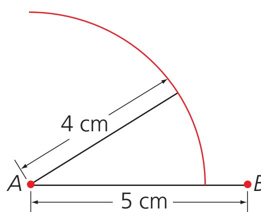


Figura 27

2. Con centro en *B* se dibuja un arco con abertura de 2 cm.

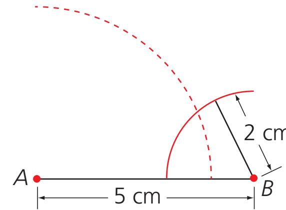


Figura 28

3. El punto de intersección de los dos arcos anteriores es el punto *C*.

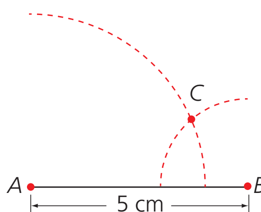


Figura 29

4. Se trazan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

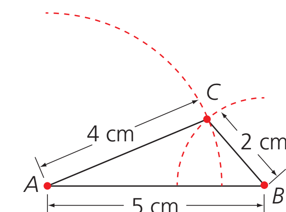


Figura 30

Ejercitación

2 Construye un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 4 cm y 7 cm.

Solución:

Para construir el triángulo:

a. Primero se traza un segmento *AB* de longitud 7 cm.

b. Con centro en *A* se dibuja un arco con abertura de 4 cm (Figura 31). Luego, con centro en *B*, se dibuja un arco con abertura 2 cm (Figura 32).

c. Como los dos arcos anteriores no se intersecan, se concluye que no existe un triángulo con las longitudes dadas.

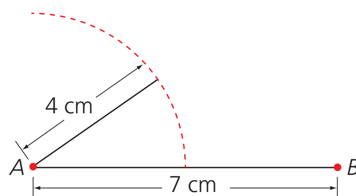


Figura 31

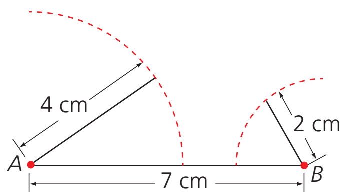


Figura 32

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás dadas condiciones sobre ciertas medidas de lados y/o ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

3 Clasifica los triángulos según la medida de sus lados.

a.

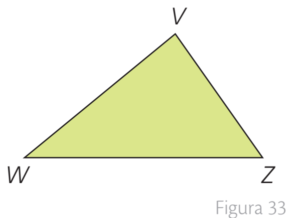


Figura 33

b.

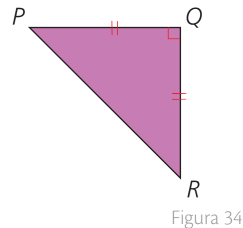


Figura 34

c.

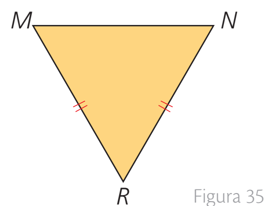


Figura 35

d.

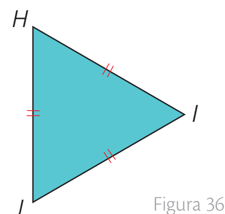


Figura 36

4 Clasifica los siguientes triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.

a.

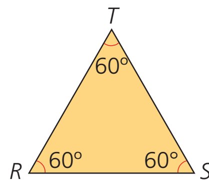


Figura 37

b.

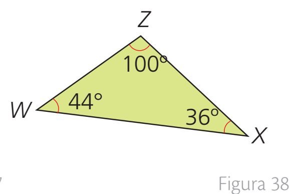


Figura 38

c.

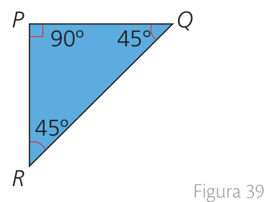


Figura 39

d.

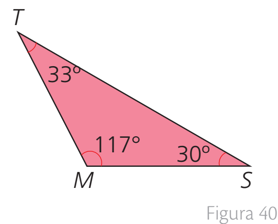


Figura 40

5 Subraya las afirmaciones que son verdaderas. Justifica.

a. Si un triángulo es isósceles, entonces es equilátero.

b. Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

c. Si un triángulo es rectángulo, entonces es equilátero.

d. Algunos triángulos son rectángulos e isósceles.

e. Ningún triángulo rectángulo puede ser acutángulo.

f. Algunos triángulos isósceles son obtusángulos.

Modelación

6 Encuentra el valor de x en cada caso.

a.

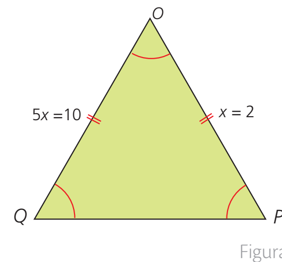


Figura 41

b.

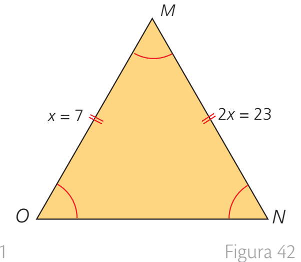


Figura 42

7 Halla el valor de las incógnitas en cada figura.

a.

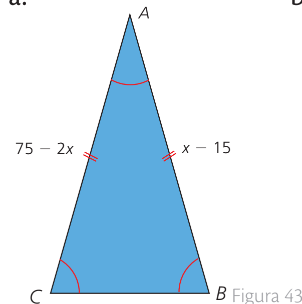


Figura 43

b.

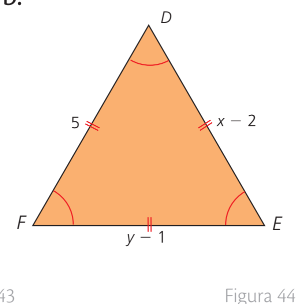


Figura 44

8 Construye un triángulo ABC usando los elementos dados en cada caso.

a. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm

b. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y m$\measuredangle C = 56°$

9 Construye, si es posible, un triángulo:

a. Equilátero de 4 cm de lado.

b. Isósceles cuyos lados congruentes midan 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos mida 120°.

c. Con un ángulo C de 30°, un ángulo A de 90° y un lado común a los dos ángulos que mida 5 cm.

Resolución de problemas



10 Un triángulo rectángulo tiene los dos catetos congruentes. ¿Qué puedes saber de los dos ángulos agudos que tiene este triángulo?

11 Francisco necesita rodear con malla una finca que mide 150 m en uno de sus lados y 120 m en otro y que tiene forma triangular. Si se sabe que el ángulo comprendido entre este par de lados mide 35°:

a. ¿Cuál es la representación del terreno? Dibújala en tu cuaderno.

b. ¿Cuánta malla debe comprar Francisco en total?

2 Líneas notables en el triángulo

Explora

La plaza principal de cierto pueblo tiene la forma que se observa en la Figura 1.

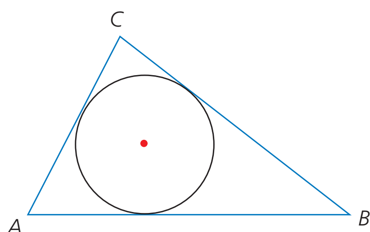


Figura 1

- Si se quiere ubicar una fuente en el punto central del círculo, ¿cómo pueden los ingenieros determinar la posición exacta de dicho punto?

Desde el punto de vista geométrico, el plano de la plaza del pueblo se representó como un triángulo con una circunferencia inscrita en él.

El centro de esta circunferencia corresponde al punto en el que se cortan las bisectrices del triángulo, tal y como se muestra en la Figura 2.

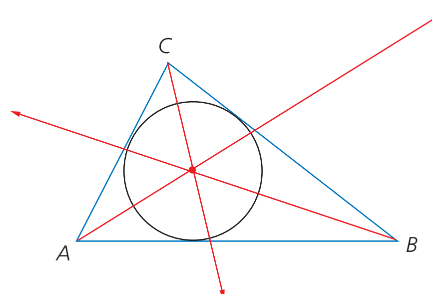


Figura 2

Las bisectrices son uno de los tipos de líneas notables de un triángulo.

Las **líneas notables de un triángulo** son: las **alturas**, las **bisectrices**, las **mediatrices** y las **medianas**.

- En un triángulo, una **altura** es uno de los segmentos perpendiculares que se pueden trazar desde uno de los vértices del triángulo hasta el lado opuesto. Además, todo triángulo tiene tres alturas.

Observa cómo se traza una de las alturas del $\triangle ABC$.

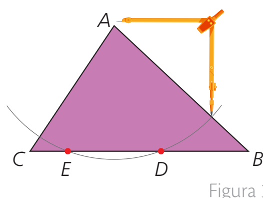


Figura 3

1. Se ubica la punta del compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en dos puntos el lado opuesto.

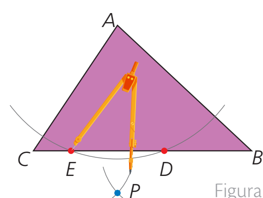


Figura 4

2. Se hace centro en cada punto que se obtuvo en el paso anterior y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto *p*.

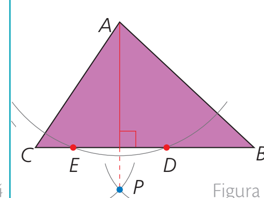


Figura 5

3. Se traza la altura uniendo el vértice con el punto de corte *p* que se halló en el paso anterior.

- Una **bisectriz** es la semirrecta que divide un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes.

Para trazar cada bisectriz se puede seguir este proceso.

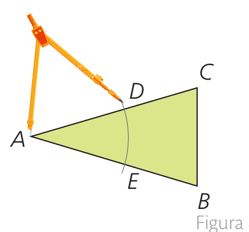


Figura 8

1. Se ubica la punta del compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en un punto cada uno de los lados que lo conforman.

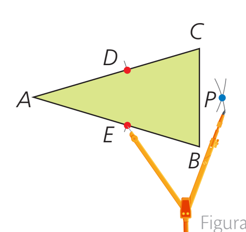


Figura 9

2. Se hace centro en cada punto que se obtuvo en el paso anterior y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto *P*.

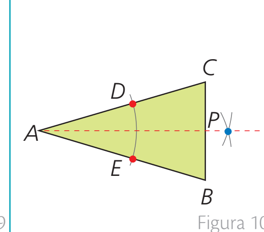


Figura 10

3. Se traza la bisectriz uniendo el vértice con el punto de corte *P* que se halló en el paso anterior.

Ten en cuenta

Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado **ortocentro** (Figura 6).

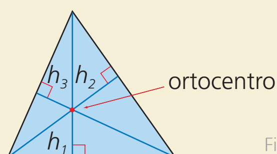


Figura 6

Las bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado incentro (Figura 7).

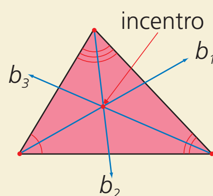


Figura 7

Destreza con criterios de desempeño: Definir y dibujar medianas y baricentro; mediatrices y circuncentro; alturas y ortocentro; bisectrices e incentro en un triángulo

- La **mediatriz** de un lado del triángulo es la recta perpendicular en el punto medio de cada uno de los lados del triángulo. Todo triángulo tiene tres mediatrices.

Observa cómo se traza la mediatriz de uno de los lados de un triángulo.

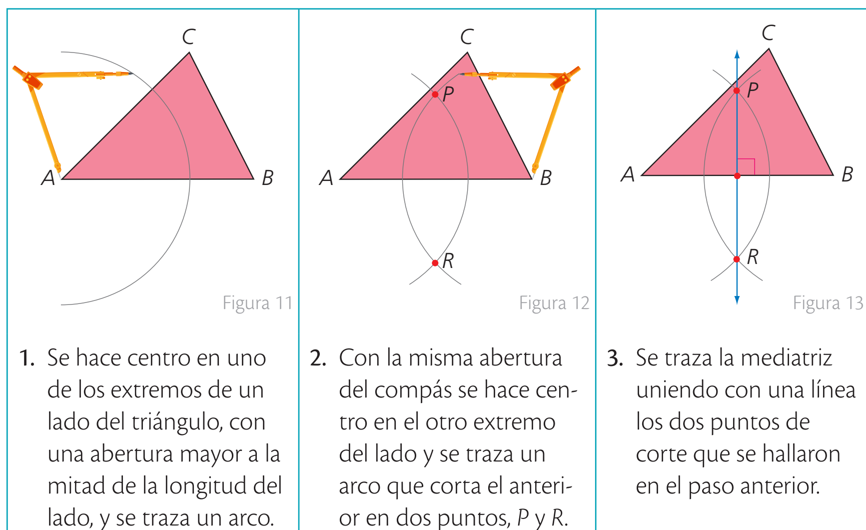


Figura 11 · Figura 12 · Figura 13

1. Se hace centro en uno de los extremos de un lado del triángulo, con una abertura mayor a la mitad de la longitud del lado, y se traza un arco.	**2.** Con la misma abertura del compás se hace centro en el otro extremo del lado y se traza un arco que corta el anterior en dos puntos, *P* y *R*.	**3.** Se traza la mediatriz uniendo con una línea los dos puntos de corte que se hallaron en el paso anterior.

- Una **mediana** de un triángulo es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo tiene tres medianas.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Traza la mediana de un triángulo cualquiera *ABC*.

Solución:

Este es el proceso para trazar una de las medianas de un triángulo.

1. Con el compás se hace centro en *A* y, con una abertura mayor que la mitad del segmento *AC*, se trazan dos arcos a uno y otro lado del segmento *AC*.

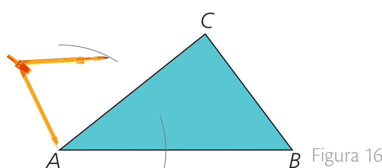


Figura 16

2. Se repite el proceso en el vértice *C*, marcando los dos puntos de corte *P* y *R*.

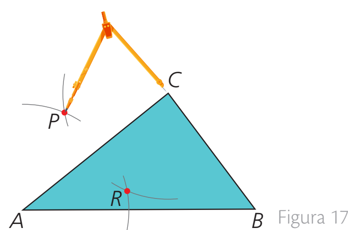


Figura 17

3. El punto *T* de intersección entre el lado *AC* y el segmento que une los puntos *P* y *R* es el punto medio de *AC*.

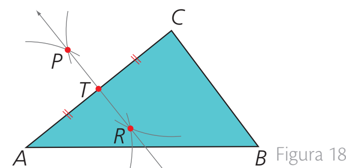


Figura 18

4. Se traza el segmento *BT* y se genera la mediana relativa al lado *AC*.

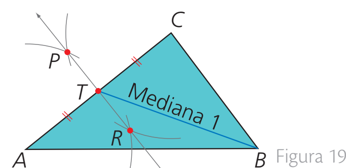


Figura 19

Ten en cuenta

Las mediatrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado **circuncentro** (Figura 14).

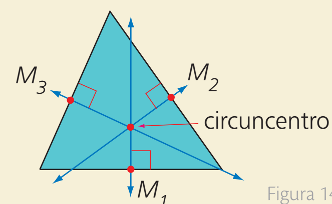


Figura 14

Las medianas de un triángulo se cruzan en un punto llamado **baricentro** (Figura 15).

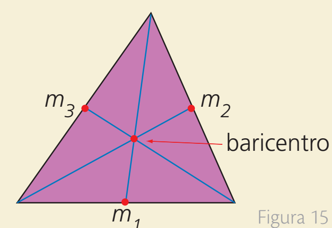


Figura 15

App

Líneas notables en el triángulo

Abre la aplicación Triangle Calculator, ingresa las medidas de los lados del triángulo, selecciona graficar medianas, alturas y bisectrices del triángulo y halla sus medidas.



2 Líneas notables en el triángulo

Matema**TICS**

Traza las medianas de un triángulo con GeoGebra

Para trazar las medianas de un triángulo vas a necesitar algunas de las siguientes herramientas en GeoGebra.

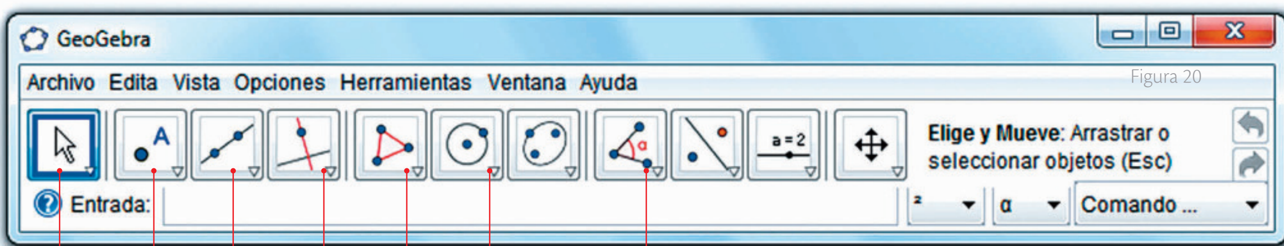


Figura 20

Generales
Puntos
Rectas y segmentos
Relaciones entre rectas
Polígonos
Circunferencias y arcos
Números y ángulos

- El proceso para hacer la construcción es el siguiente.

Se construye un triángulo mediante la herramienta *polígono*. Para ello se ubican los vértices dando clic sobre el área de vista gráfica y asegurándose de cerrar correctamente la figura.

Se halla el punto medio de cada lado. Para ello se selecciona el icono *puntos*; se elige la herramienta *punto medio* y luego se da clic en los lados a, b y c del triángulo.

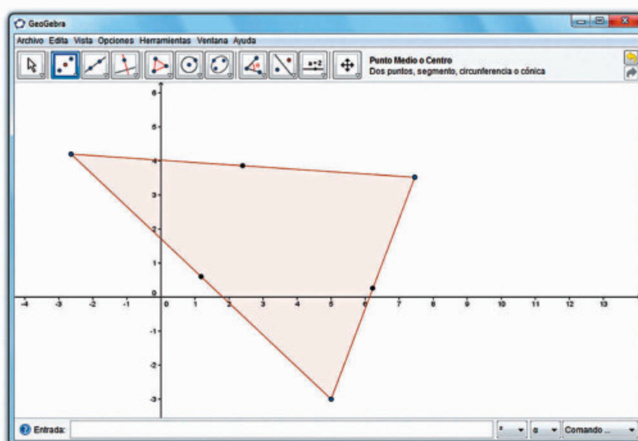


Figura 21

Ahora se trazan las medianas. En el icono *rectas y segmentos* selecciona la herramienta *recta que pasa por dos puntos* y une cada punto medio con el vértice opuesto dando clic sobre cada uno.

Las tres medianas se intersecaron entre sí en un punto llamado **baricentro**. Para nombrarlo recurre al icono *puntos*, luego a la herramienta *intersección de dos objetos* y da un clic en dos de las medianas.

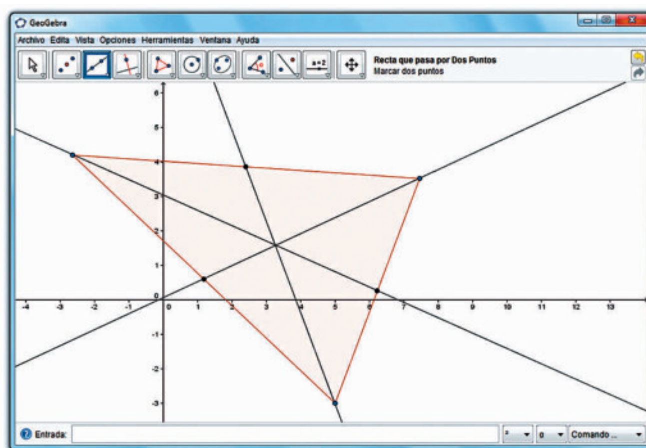


Figura 22

Destreza con criterios de desempeño: Definir y dibujar medianas y baricentro; mediatrices y circuncentro; alturas y ortocentro; bisectrices e incentro en un triángulo.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Selecciona el nombre de las líneas notables que se han trazado en cada triángulo.

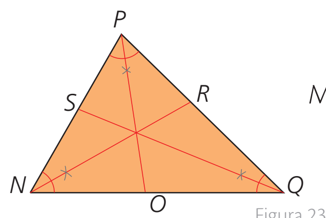
a.


Figura 23

Alturas ☐
Medianas ☐
Mediatrices ☐
Bisectrices ☐

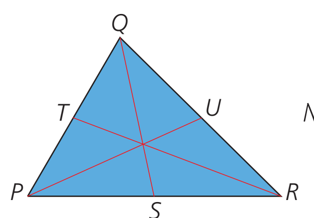
b.


Figura 24

Alturas ☐
Medianas ☐
Mediatrices ☐
Bisectrices ☐

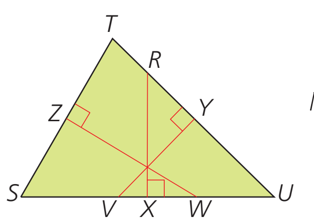
c.


Figura 25

Alturas ☐
Medianas ☐
Mediatrices ☐
Bisectrices ☐

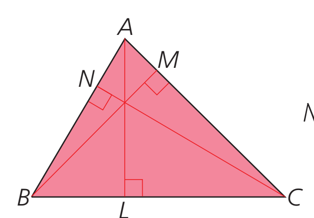
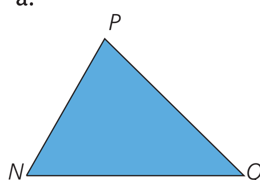
d.


Figura 26

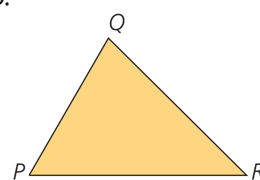
Alturas ☐
Medianas ☐
Mediatrices ☐
Bisectrices ☐

Ejercitación

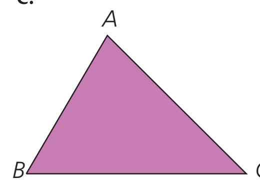
3 Encuentra los puntos solicitados en los triángulos dados.

a.


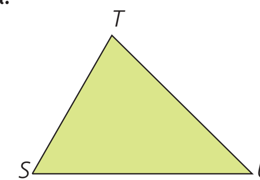
El intercentro Figura 27

b.


El baricentro Figura 28

c.


El ortocentro Figura 29

d.


El circuncentro Figura 30

Comunicación

4 Une cada definición con el nombre correspondiente.

a. Punto de intersección de las bisectrices.
b. Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.
c. Segmento perpendicular desde uno de los vértices hasta el lado opuesto.
d. Punto de corte de las mediatrices.
e. Divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
f. Punto de intersección de las medianas.
g. Punto de intersección de las alturas.
h. Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

- Altura
- Bisectriz
- Mediatriz
- Incentro
- Circuncentro
- Mediana
- Baricentro
- Ortocentro

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

5 La estructura de cierta ala Delta (Figura 31) está diseñada con base en dos triángulos y varios tubos transversales más livianos, dispuestos de forma que determinan líneas notables en dichos triángulos.

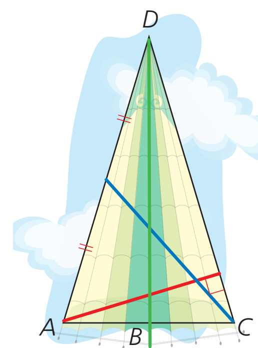


Figura 31

a. ¿Cuál es la línea notable marcada con color rojo?
b. ¿Cuál es la línea notable marcada con color azul?
c. Si se ponen tubos determinando las alturas de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$, ¿todos estarán dentro de la estructura? Explica.
d. ¿De qué color es la bisectriz del ángulo D?

3 Propiedades de los triángulos

Explora

Una escalera está apoyada en una pared, formando un ángulo de 60° con el piso (Figura 1).

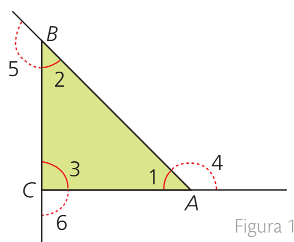


Figura 1

- ¿Cuál es medida del ángulo *B*?

El triángulo *ABC* de la Figura 1 es rectángulo ya que ∡C es recto y ∡A mide 60º.

Para calcular la medida del ∡B se puede partir del hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180º$$
$$60º + \measuredangle B + 90º = 180º$$
$$\measuredangle B = 180º - 150º = 30º$$

En los triángulos se cumplen algunas propiedades métricas que permiten resolver otros problemas geométricos.

3.1 Propiedades relacionadas con los ángulos del triángulo

- **Suma de ángulos internos**

1. La suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

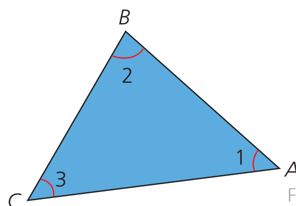


Figura 2

$$m\,\measuredangle 1 + m\,\measuredangle 2 + m\,\measuredangle 3 = 180°$$

- **Suma de ángulos externos**

2. La suma de sus ángulos externos es de 360°.

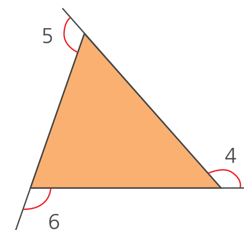


Figura 3

$$m\,\measuredangle 4 + m\,\measuredangle 5 + m\,\measuredangle 6 = 360°$$

- **Propiedad de los ángulos exteriores**

3. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior

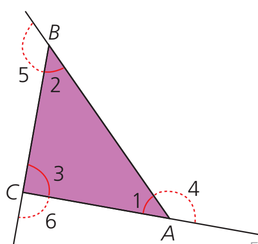


Figura 4

$$m\,\measuredangle 4 = m\,\measuredangle 2 + m\,\measuredangle 3$$

- **Propiedad de los triángulos isósceles**

4. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

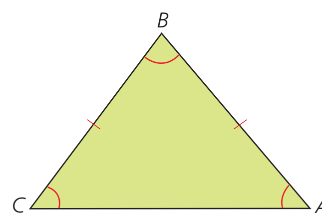


Figura 5

Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $m\,\measuredangle A = m\,\measuredangle C$

Ejemplo 1

En el triángulo *CBX*, ¿cuál es la medida del ángulo *X*?

Como $\measuredangle X + \measuredangle C + \measuredangle B = 180°$.

Entonces, $\measuredangle X + 100° + 36° = 180°$.

Luego, $\measuredangle X = 44°$.

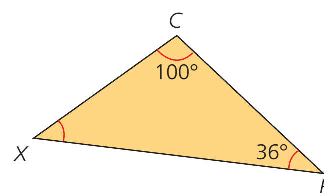


Figura 6

Destreza con criterios de desempeño: Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.

3.2 Propiedades relacionadas con los lados del triángulo

- Desigualdad triangular

5. En un triángulo, la medida de uno de los lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

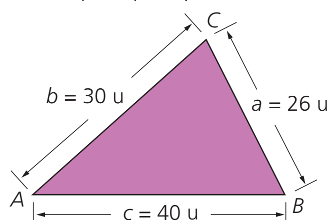


Figura 7

$a < b + c$ y $a > b - c$

- Relación lado - ángulo

6. En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

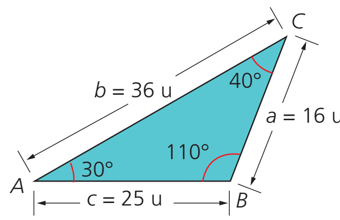


Figura 8

Como b es mayor que a y c, entonces $\measuredangle B$ es mayor que $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$.

Ejemplo 2

Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 5 cm y 3 cm, dado que:

En todo triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados siempre es mayor que la medida del tercero.

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$
$7 < 5 + 3$	$5 < 7 + 3$	$3 < 7 + 5$
$7 < 8$	$5 < 10$	$3 < 12$

Por lo tanto, dicho triángulo existe.

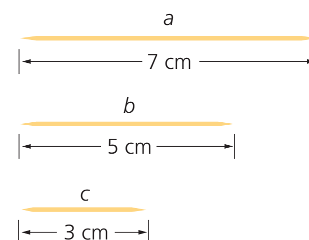


Figura 11

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina el valor de x en la Figura 9.

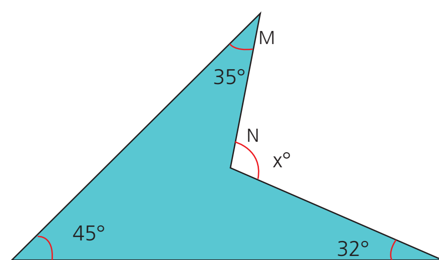


Figura 9

Solución:

Al prolongar el segmento MN, la figura queda dividida en dos triángulos. Teniendo en cuenta la relación que existe entre los ángulos se tiene que: $m\ \measuredangle y = 80°$ y $m\ \measuredangle x = 112°$

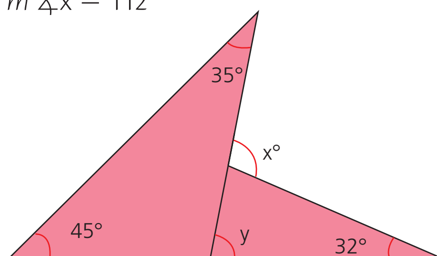


Figura 10

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación



www.e-sm.net/8smt11

Encontrarás imágenes y demostraciones relacionadas con las propiedades de los triángulos.

3 Propiedades de los triángulos

MatemaTICS

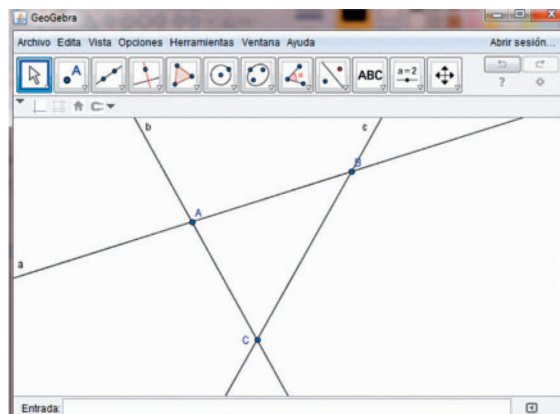
Construcción de ángulos interiores y exteriores de un triángulo con GeoGebra

Geogebra es un software que permite construir triángulos y observar sus propiedades. A continuación se explica cómo construir un triángulo y obtener los ángulos internos.

Medición de lados

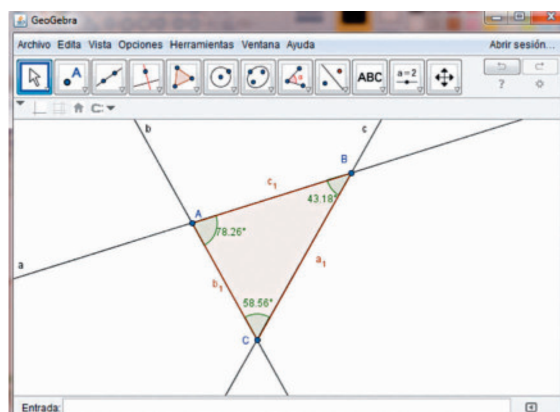
Puedes medir las longitudes de los lados haciendo clic en Distancia o Longitud y luego haciendo clic en los segmentos a medir.

Construcción de un triángulo a partir de tres rectas. Selecciona en el menú la opción y construye tres rectas que se intersequen, generando un triángulo. Así se muestra en Geogebra.



Construcción de los ángulos internos de un triángulo. En la herramienta Ángulo haz clic en los puntos BCA, luego en los puntos CAB y por último en los puntos ABC. De esta forma obtendrás los ángulos internos del triángulo.

Si observas la construcción, la suma de los tres ángulos es 180°. De esta manera se cumple la propiedad 1 de los triángulos.



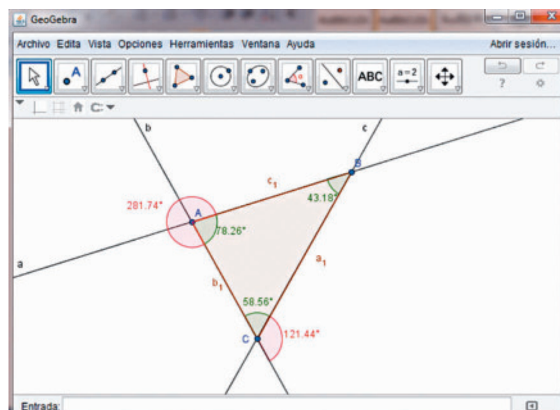
Construcción de ángulos exteriores. Puedes construir ángulos exteriores con la opción Ángulo y puedes hacer clic en las dos rectas que quieres que aparezca el ángulo. En el ejemplo se muestran algunos.

1. Construye un triángulo en Geogebra así:

a. La suma de los ángulos externos es 360°.

b. Al mayor lado se le opone el mayor ángulo.

c. Si dos lados son congruentes, entonces los lados opuestos a esos lados también son congruentes.



Destreza con criterios de desempeño: Resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el valor de *x* en cada caso.

a.

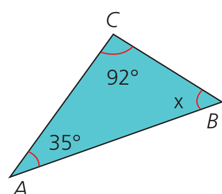


Figura 12

b.

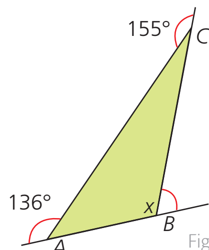


Figura 13

c.

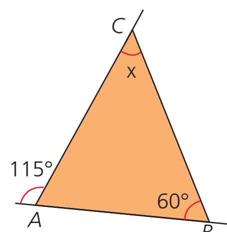


Figura 14

d.

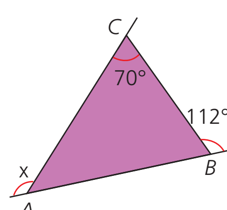


Figura 15

e.

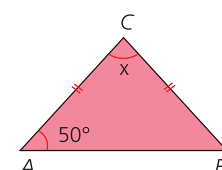


Figura 16

f.

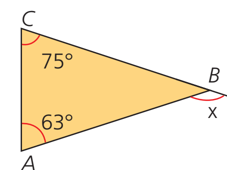


Figura 17

3 Encuentra la medida del segmento *BD* en la Figura 18, Si el ángulo D es congruente con el ángulo C del Triángulo BCD

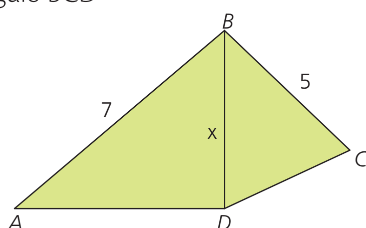


Figura 18

4 Halla el valor de *x* en la Figura 19

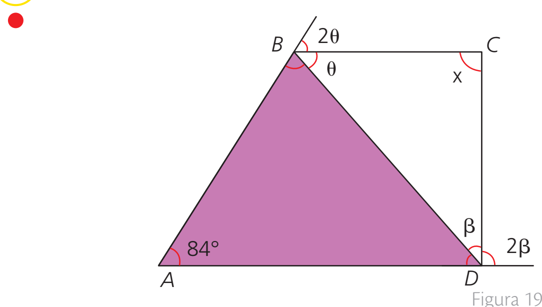


Figura 19

Razonamiento

5 Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. En el triángulo formado por los segmentos $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, el ángulo con mayor apertura es el opuesto al lado b. ( )

b. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 7 cm. ( )

c. En un triángulo, los ángulos interiores pueden medir 45º, 32º y 50º. ( )

d. Es posible contruir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 11 cm y 6 cm. ( )

e. Los ángulos exteriores de un triángulo miden 120º, 100º y 110º respectivamente. ( )

6 Calcula la suma de todos los ángulos *x, y, z, w, u* y *v* a partir de la información de la Figura 20

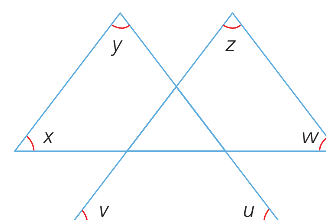


Figura 20

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 En el triangulo *ABC* que se muestra en la Figura 21, el ángulo *A* mide 58°. ¿Cuánto mide el ángulo *BDC*, donde *D* es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos *B* y *C*?

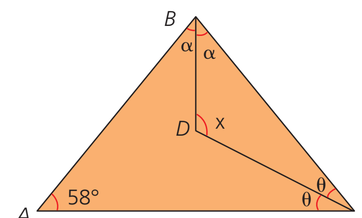


Figura 21

8 El ángulo *B* de un triangulo *ABC*, que se muestra en la Figura 22, mide 40°. ¿Cuánto mide el ángulo *AEC* donde *E* es el punto de intersección de las bisectrices del ángulo interior *A* y el ángulo exterior *C*?

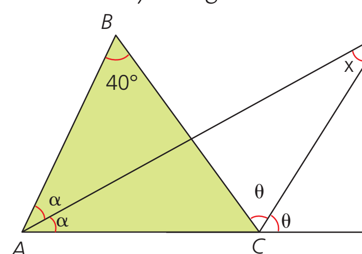


Figura 22

4 Triángulos congruentes

Explora

El uso de rampas en deportes extremos es cada vez más común. Existen rampas cuya inclinación puede llegar a los 80°, especialmente en el *patinaje*.



En la Figura 1 se observa que los triángulos laterales de las rampas son congruentes.

La congruencia entre figuras consiste en la igualdad de forma y tamaño. Para ello se comparan lados y ángulos correspondientes.

Por lo tanto, al analizar los triángulos laterales de las rampas de *patinaje* que se muestran en la Figura 1, se tiene que:

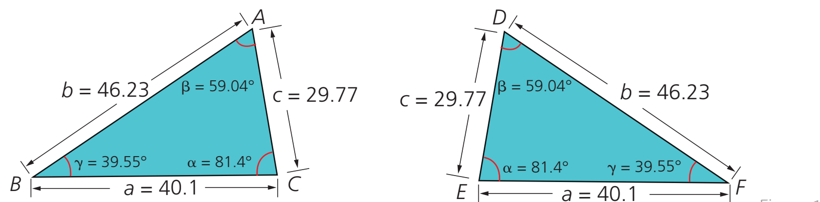


Figura 1

Para garantizar que los triángulos son congruentes se debe comprobar que los lados y los ángulos correspondientes tienen la misma medida. Entonces, según la Figura 2, se concluye que:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle F$, $\measuredangle C \cong \measuredangle E$

$\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$

Entonces se concluye que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes.

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **congruentes** si los lados correspondientes entre ellos son congruentes y los ángulos correspondientes también lo son.

Ejemplo 1

Los triángulos MLR y UST de la Figura 2 son congruentes porque:

Sus lados son congruentes:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

y sus ángulos son congruentes:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$

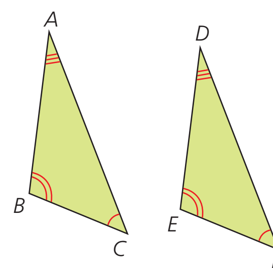


Figura 2

Ejemplo 2

¿Qué se puede deducir de la figura 3?

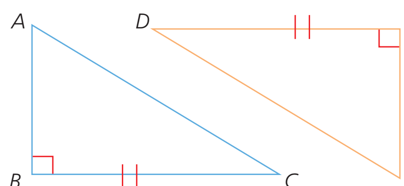


Figura 3

La congruencia se simboliza con ≅, de la siguiente manera:

$BC \cong DE$, $AB \cong EF$ y $AC \cong DF$

Se observa que los ángulos que corresponden a "B" y "E" forman una perpendicular y por ende miden 90°. Si se supone que el ángulo "A", que es congruente con el ángulo "F", mide 60°, entonces obtenemos la medida de los ángulos faltantes:

$$x = 180° - (90° + 60°)$$

$$x = 30°$$

Es decir, la medida de los ángulos "C" y "D", que son congruentes, es 30°.

Ten en cuenta

La congruencia es un concepto importante dentro de la geometría y se remonta a unos 3 000 años a. C. en el antiguo Egipto, donde era necesario para medir predios agrarios (para realizar trueques) y para la construcción de pirámides y otros monumentos.



Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

4.1 Criterios de congruencia de triángulos

Los **criterios de congruencia** son postulados que permiten establecer si dos triángulos son congruentes a partir de algunas de las medidas de sus lados o sus ángulos.

En la tabla 1 se enuncian los criterios.

Criterios de congruencia de triángulos	
Lado-Ángulo-Lado (LAL)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes.	$\overline{CA} \cong \overline{PM}$ $\quad \measuredangle A \cong \measuredangle M$ $\quad \overline{AB} \cong \overline{MN}$
Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos ángulos y el lado común son congruentes.	$\measuredangle A \cong \measuredangle R$ $\quad \measuredangle B \cong \measuredangle S$ $\quad \overline{AB} \cong \overline{RS}$
Lado-Lado-Lado (LLL)	
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados congruentes.	$\overline{AB} \cong \overline{JK}$ $\quad \overline{BC} \cong \overline{KL}$ $\quad \overline{AC} \cong \overline{JL}$
Lado-Lado-Ángulo (LLA)	
Dos triángulos congruentes si dos lados son congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes.	$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ $\quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ $\quad \measuredangle B \cong \measuredangle B'$

Tabla 1

Ejemplo 3

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes. Observa cómo se determina el valor de los ángulos $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$ y $\measuredangle E$ (Figura 4).

Como $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces $m\measuredangle C = 43°$. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, $m\measuredangle B = 53°$.

También se sabe que $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, así que: $m\measuredangle D = 84°$. Finalmente, como $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, entonces $m\measuredangle E = 53°$.

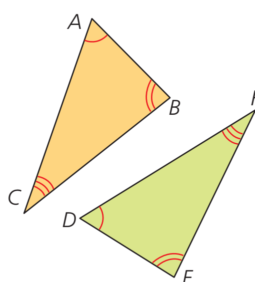


Figura 4

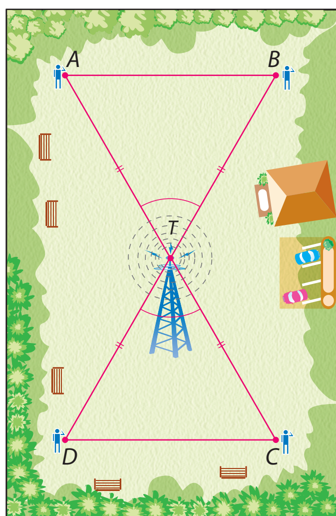
Ten en cuenta

Algunas estructuras de torres de comunicación están compuestas por figuras geométricas.



Por ejemplo, en las torres eléctricas se pueden evidenciar triángulos que en muchos casos son congruentes.

4 Triángulos congruentes



Ubicación de una antena receptora en un terreno. Figura 5

Ejemplo 4

En la Figura 5 se observa la ubicación de una antena. En los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se encuentran algunas personas que reciben la señal con la misma intensidad. ¿Por qué sucede esto?

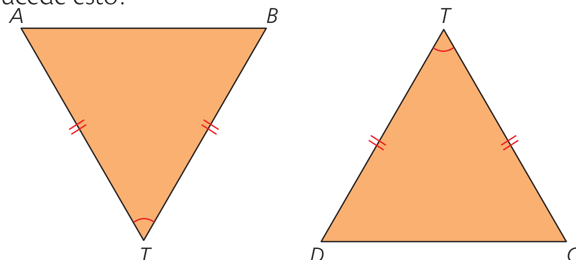


Figura 6

Los triángulos $\triangle ABT$ y $\triangle DCT$ determinados en la Figura 6 son congruentes por el criterio LAL.

Ejemplo 5

Observa la Figura 7 y comprueba que el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *FDE*.

1. $\measuredangle C \cong \measuredangle E$
2. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
3. $\measuredangle B \cong \measuredangle D$
4. Por criterio ALA, $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

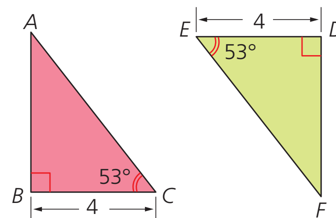


Figura 7

Ejemplo 6

A partir de la información de la Figura 7, comprueba que en el triángulo isósceles *ABC*, si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, los triángulos determinados por la bisectriz *b* que interseca al lado $\overline{AB}$ son congruentes.

Por definición de bisectriz: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$.

Por definición de triángulo isósceles: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Por propiedad de la congruencia de segmentos: $\overline{BD} \cong \overline{BD}$.

Por el criterio de congruencia LAL: $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

Otra forma de hacer la prueba es usando la congruencia $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ y el criterio de congruencia ALA.

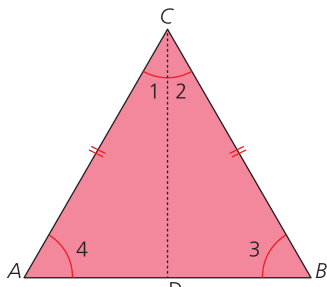


Figura 8

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Demuestra que dadas las rectas *a* y *b* paralelas, y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ congruentes (Figura 8), los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BDE$ son congruentes.

Solución:

1. Por la información dada en el enunciado se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ son alternos internos entre paralelas.

3. Por el criterio de congruencia ALA:
$\triangle ACE \cong \triangle BDE$.

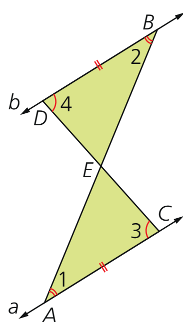


Figura 9

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Identifica si las parejas de triángulos son congruentes. Escribe cuál de los criterios te permite comprobarlo.

a.

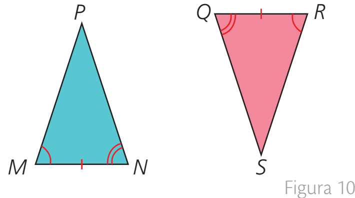


Figura 10

b.

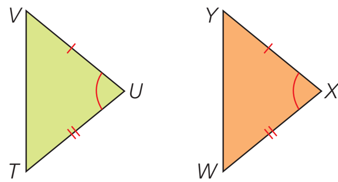


Figura 11

c.

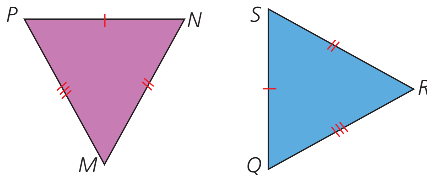


Figura 12

d.

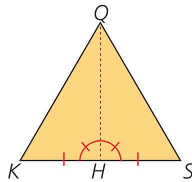


Figura 13

Razonamiento

3 Teniendo en cuenta la información dada en las figuras, decide si los triángulos son congruentes. En caso afirmativo escribe el nombre de cada vértice y da el criterio que justifica la congruencia.

a.

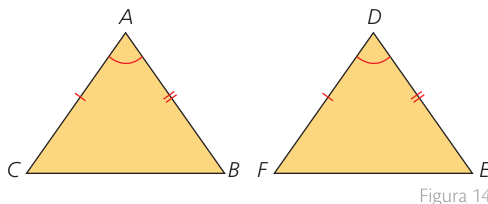


Figura 14

b.

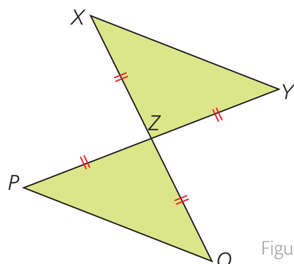


Figura 15

4 Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

a. Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

b. Un triángulo equilátero puede ser congruente con un triángulo isósceles.

c. Un triángulo acutángulo nunca es congruente con un triángulo obtusángulo.

d. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{QR}$.

5 Si $\triangle ABC \cong \triangle FED$, encuentra el valor de x y el valor del ángulo Y en la Figura 15

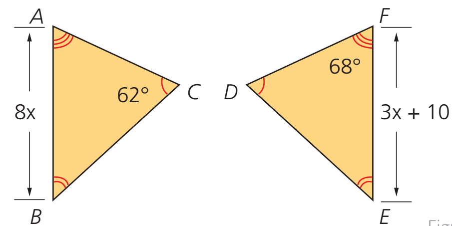


Figura 16

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

6 Camilo hizo una pintura en la que destacó con color amarillo los triángulos que él creyó congruentes a su original, sin embargo cometió algunos errores.

¿Cuáles son los triángulos que no son congruentes con el original?

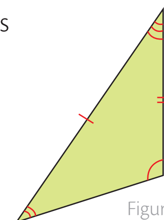


Figura 17

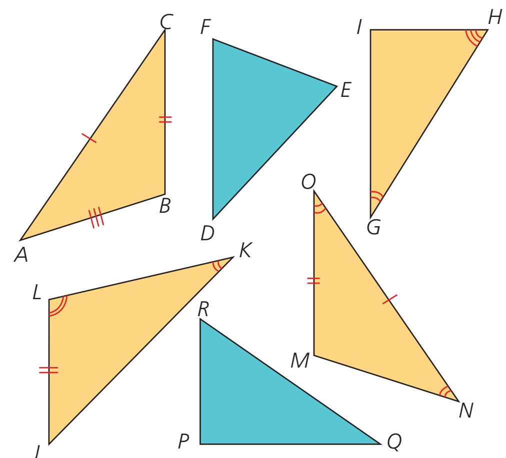


Figura 18

5 Cuadriláteros

Explora:

Observa la pintura de la Figura 1 y determina qué tienen en común y qué tienen de diferente las figuras que la componen.

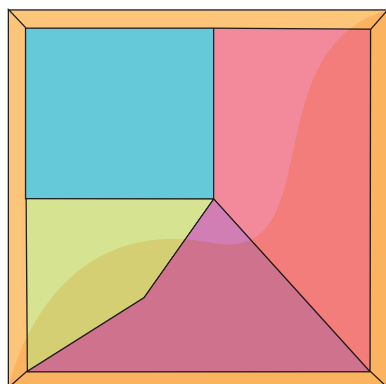


Figura 1

Para identificar las características comunes y las diferencias que existen entre las figuras se pueden analizar los polígonos que componen la figura, según los elementos básicos de los polígonos.

Figuras	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Lados	4	4	4	4
Vértices	4	4	4	4
Diagonales	2	2	2	2

Como se observa en la tabla anterior, el número de elementos de los polígonos siempre es el mismo. Esto se debe a que las cuatro figuras corresponden a cuadriláteros.

Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos de recta que se intersecan únicamente en sus extremos y que a su vez han sido determinados previamente por cuatro puntos en el espacio, de los cuales tres no son colineales.

Además, los cuadriláteros tienen siempre cuatro vértices, dos diagonales y cuatro ángulos internos (Figura 6).

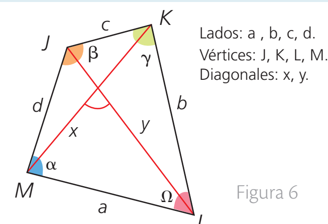


Figura 6

Ten en cuenta

Todos los cuadriláteros existentes a su vez son cuadrángulos, es decir, polígonos que poseen cuatro ángulos.

Elementos de un cuadrilátero

- **Vértices**: Cuentan con cuatro y son los puntos de intersección de los lados que conforman el cuadrilátero.
- **Lados**: Son los cuatro segmentos de recta que se unen consecutivamente por sus extremos. Según su relación, los lados pueden ser opuestos o consecutivos.
- **Diagonales**: Los cuadriláteros poseen dos diagonales, que corresponden a los segmentos de recta cuyos extremos son dos vértices que no son consecutivos.
- **Ángulos interiores**: Son cuatro que están definidos por dos lados consecutivos. La suma de estos ángulos internos siempre es 360°.
- **Ángulos exteriores**: También son cuatro, pero estos son definidos por la prolongación de uno de los lados sobre un vértice y el consecutivo en el mismo vértice.

Ten en cuenta

Los lados opuestos en un cuadrilátero son los que no tienen ningún vértice común.

Los lados consecutivos en un cuadrilátero son los que tienen un vértice común.

Así, para el cuadrilátero de la Figura 6, se tiene:

Lados: a, b, c, d   Vértices: J, K, L, M   Diagonales: x, y

Ángulos interiores: $m\measuredangle J + m\measuredangle K + m\measuredangle L + m\measuredangle M = 360°$

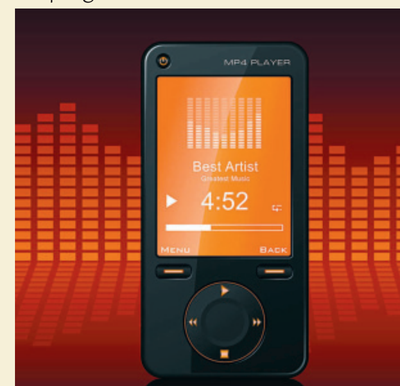
Destreza con criterios de desempeño: Definir, clasificar y analizar los elementos de los cuadriláteros.

Clasificación de los cuadriláteros		
Paralelogramos	**Trapecios**	**Trapezoides**
Sus dos pares de lados opuestos son paralelos. Pueden ser:	Solo dos de sus lados son paralelos. Pueden ser:	No tienen pares de lados opuestos congruentes. Pueden ser:
Cuadrados: todos sus ángulos y sus lados son congruentes.	**Escalenos**: todos sus ángulos tienen diferente medida. (Base menor, Altura, Base mayor)	**Simétricos**: tienen dos pares de lados consecutivos congruentes.
Rectángulos: todos sus ángulos son congruentes.	**Isósceles**: sus lados no paralelos son congruentes. (Base menor, Altura, Base mayor)	**Asimétricos**: ninguno de sus lados es congruente con otro.
Rombos: todos sus lados son congruentes.		
Romboides: los ángulos opuestos y los lados opuestos son congruentes.	**Rectángulos**: tiene dos ángulos interiores rectos. (Base menor, Altura, Base mayor)	

Tabla 1

Ten en cuenta

La tecnología ha avanzado a tal punto, que ya se cuenta con reproductores de video cuya pantalla no supera las dos pulgadas.



Ejemplo 1

Clasifica los cuadriláteros de la Figura 7.

a. b. c. d.

Figura 7

a. Cuadrado **b.** Trapecio **c** y **d.** trapezoides asimétricos

5 Cuadriláteros

Razonamiento matemático

Ley del paralelogramo

Los paralelogramos tienen una ley geométrica donde se relacionan los lados con sus diagonales. Esto se representa con la siguiente fórmula:

$(JK)^2 + (KL)^2 + (LM)^2 + (MJ)^2 = (JL)^2 + (KM)^2$

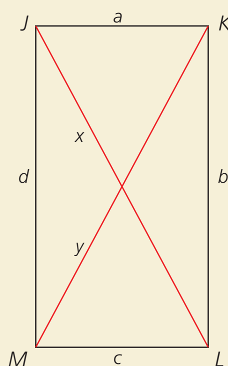


Figura 8

5.1 Propiedades de las diagonales de los paralelogramos

1. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan, es decir se intersecan en el punto medio.

Ejemplo 2

En el paralelogramo *CDEF* de la figura 9, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$ son diagonales y *G* es punto medio de ellas.

Para demostrar ese enunciado, se debe comprobar la congruencia del triángulo $\triangle CGD$ con el $\triangle FGE$, utilizando el criterio ALA y las propiedades de los cuadriláteros.

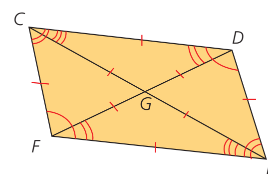


Figura 9

2. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Ejemplo 3

En el rectángulo *CDEF* de la Figura 10, $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.

La congruencia de las diagonales se puede comprobar estableciendo la congruencia del triángulo *CFE* con el triángulo *DEF*.

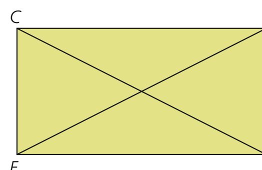


Figura 10

3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Ejemplo 4

En el rombo *CDEF* de la figura 11, $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.

La perpendicularidad de las diagonales se puede comprobar estableciendo la congruencia del triángulo *CGD* con el triángulo *CGF*.

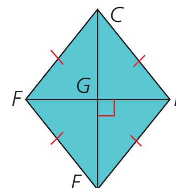


Figura 11

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Marca V si la afirmación dada es verdadera o F si la afirmación dada es falsa:

a. Todo cuadrado es rombo. ( )

b. Las diagonales de un rombo se bisecan. ( )

c. Todo cuadrado es rectángulo. ( )

d. Todo rectángulo es cuadrado. ( )

e. Algunos rombos son rectángulos. ( )

f. Las diagonales de los cuadrados son congruentes. ( )

Solución:

a. (V); porque el cuadrado tiene todos sus lados congruentes.

b. (V); porque es una de las propiedades de los paralelogramos.

c. (V); el cuadrado tiene los lados iguales dos a dos y ángulos rectos.

d. (F); porque no tiene todos los lados iguales.

e. (F); porque los lados no son iguales dos a dos.

f. (V); porque la medida de los catetos son iguales.

Destrezas con criterios de desempeño: Definir, clasificar y analizar los elemrntos de los cuadriláteros

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Lee la información y resuelve.

Al trazar una diagonal en cierto tipo de cuadriláteros, se generan dos triángulos congruentes.

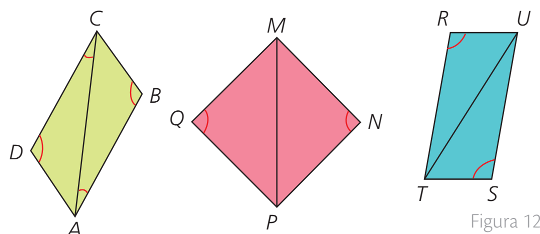


Figura 12

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$ $\triangle MNP \cong \triangle MPQ$ $\triangle RTU \cong \triangle STU$

a. Traza cualquier diagonal a cada uno de los siguientes cuadriláteros, e identifica en cuáles se generan dos triángulos congruentes.

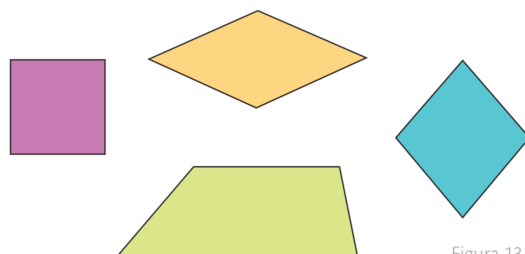


Figura 13

b. ¿Para qué tipo de cuadriláteros se cumple esta propiedad? Explica.

3 En el cuadrilátero *ABCD* de la Figura 14, $\overline{BM} = \overline{MC}$, $\overline{AD} = 4\,\overline{AL}$, $\overline{AD} + 2\,\overline{AB} = 18$m y $\measuredangle\, CAB = \measuredangle\, DAC$. Si $\measuredangle\, DCA = 90$, entonces, ¿cuál es la longitud de $\overline{ML}$?:

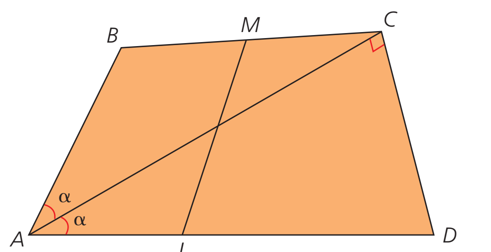


Figura 14

4 Completa cada enunciado.

a. Si un cuadrilátero tiene exactamente dos lados paralelos y un par de ángulos congruentes, el cuadrilátero es un ______.

b. Un trapezoide es simétrico si tiene dos pares de ______ congruentes.

c. En un trapecio ______ la longitud de la altura es la misma que la de uno de sus lados.

5 Clasifica los cuadriláteros según sus características.

a.

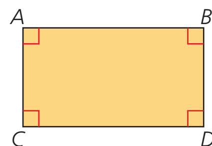


Figura 15

b.

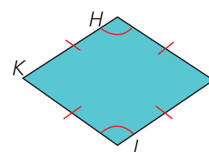


Figura 16

c.

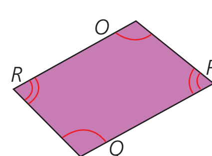


Figura 17

d.

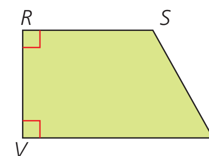


Figura 18

Modelación

6 Dibuja un romboide con regla y compás.

a. Ten en cuenta las medidas del lado *AB* y las diagonales *AC* y *CD*, como se observa en la figura 19.

A ______ B

A ______ C

B ______ D

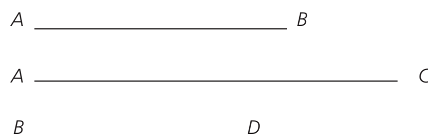


Figura 19

Resolución de problemas

7 Se construye un panel solar con forma de paralelogramo como el de la Figura 20.



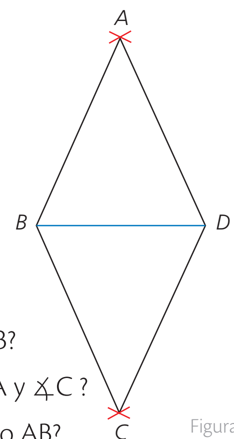


Figura 20

a. ¿Cuál es la medida del ∡B?

b. ¿Cuál es la medida de ∡A y ∡C ?

c. ¿Cuánto mide el segmento AB?

d. ¿Cuánto mide el segmento AD?

Practica Más

Elementos básicos de la recta

Comunicación

1. Observa la Figura 1 y haz afirmaciones basadas en postulados o definiciones.

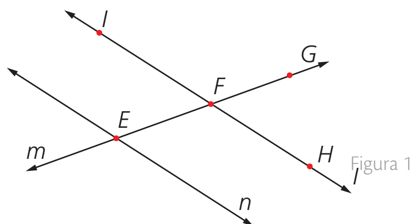


Figura 1

Ángulos

2. De acuerdo a la Figura 2 nombra:

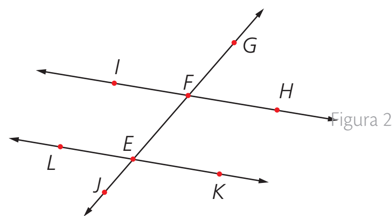


Figura 2

a. Ángulos opuestos por el vértice.

b. Ángulos adyacentes.

c. Ángulos complementarios.

d. Par lineal.

e. Ángulos suplementarios

Ángulos determinados por rectas paralelas y una secante

Razonamiento

3. Considerando que en la Figura 3 $m \| l$, halla la medida de los ángulos X y Y.

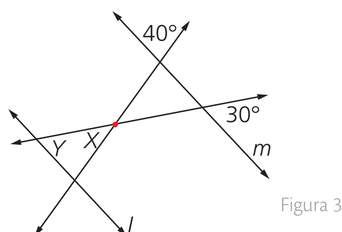


Figura 3

Resolución de problemas

4. Determina el perímetro de $\triangle ABC$ si:

- $\overline{DE}$ es segmento de la mediatriz $\overline{AB}$
- $AC = 2x + 1{,}21$
- $AD = 3x + 0{,}22$
- $DB = 4 - 2{,}78$
- $CE = x + 1{,}29$
- $ED = 3{,}48$

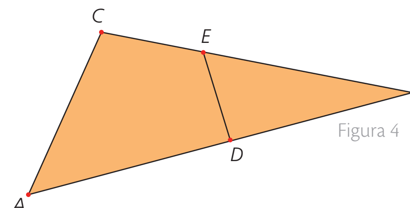


Figura 4

Triángulos

Resolución de problemas

5. Explica en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa.

a. Si los ángulos externos en un triángulo son congruentes, el triángulo es equilátero.

b. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

c. Un triángulo escaleno es acutángulo.

d. Existen triángulos isósceles que son a la vez triángulos rectángulos.

Razonamiento

6. Construye un triángulo isósceles, uno equilátero y uno escaleno. Halla el incentro, el circuncentro y el baricentro en cada uno de ellos. ¿Qué conclusión puedes sacar?

7. Escribe las características que debe cumplir un triángulo para que, al trazar un segmento desde el punto medio de uno de sus lados hasta el vértice opuesto, se obtengan triángulos congruentes.

Cuadriláteros

Resolución de problemas

8. Dibuja un ejemplo de cada tipo de cuadrilátero.

9. Propón dos casos en los que no se pueda construir un triángulo.

Resolución de Problemas

Estrategia: Ensayo y error

Problema

Un jardinero corta el césped de forma triangular, como se ve en la Figura 1.

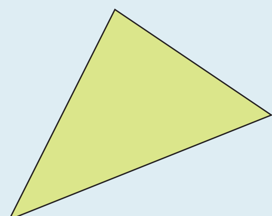


Figura 1

Si quiere trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo, ¿en dónde debe ubicar el centro de dicha circunferencia y cuál debe ser la medida de su radio?

1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son los datos que proporciona el problema?
  R: Es un triángulo escaleno y acutángulo.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: Se debe encontrar el centro y el radio de una circunferencia que pase por cada vértice del triángulo.

2. Crea un plan

- Traza en un triángulo sus líneas notables y sus puntos de corte, para ver cuál de ellos es el centro de la circunferencia que se pide.

3. Ejecuta el plan

- Dibuja nuevamente el triángulo y encuentra el ortocentro, el incentro y el circuncentro.
- Traza circunferencias con centro en estos puntos.

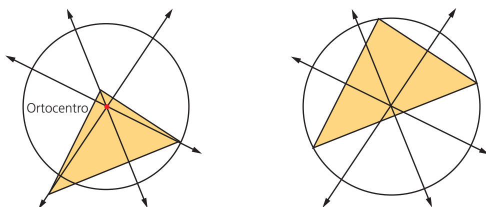


Figura 2

R: El centro de dicha circunferencia es el circuncentro y su radio la distancia del circuncentro a cualquier vértice.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el incentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo equilátero coincidan.

Aplica la estrategia

1. En la Figura 3 se halló y se trazó el circuncentro de un triángulo.

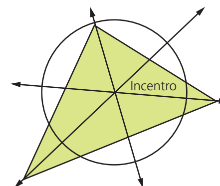


Figura 3

¿Es posible construir una circunferencia, con centro en ese punto, y que sea tangente a cada lado del triángulo?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. Utiliza el compás para construir un triángulo de dimensiones 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Qué clase de triángulo se obtiene?
3. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide 37°, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?
4. Dibuja un triángulo rectángulo de dimensiones 6 cm, 8 cm y 10 cm. Luego, traza las tres mediatrices. ¿Qué característica particular tiene el punto de corte de las tres líneas?

Formula problemas

5. Invente un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

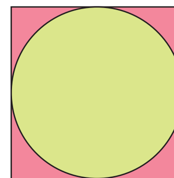


Figura 4

6 Cuerpos redondos

Explora

Muchos elementos de la naturaleza y de los objetos que usas diariamente, son excelentes ejemplos de los sólidos geométricos. (Figura 1)



Figura 1

- ¿Qué relación tienen las formas que se identifican en la fotografía?

En la fotografía de la Figura 1 se identifica un helado compuesto por dos sólidos geométricos: una esfera y un cono. Estos dos cuerpos tienen al menos una superficie curva. A este tipo de sólidos geométicos se les conoce como cuerpos redondos.



Los **cuerpos redondos** son aquellos que, como mínimo, una de sus caras o superficies son curvas. En algunos casos son llamados **cuerpos de revolución** debido a que se pueden obtener a partir del giro de una figura plana alrededor de un eje.

Cilindro	Esfera
Altura, Generatriz, Base, Radio, Eje de Giro Consiste en un cuerpo que se genera al hacer girar un rectángulo tomando como eje uno de sus lados.	Eje de giro, Radio, Centro Es el sólido que se genera al hacer girar una semicircunferencia tomando como eje su diámetro.
Cono	**Tronco de cono**
Eje de giro, Generatriz, Altura, Base, Radio Corresponde a un cuerpo geométrico que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo tomando como eje uno de sus catetos.	Base menor, Eje de giro, Radio menor, Altura, Base mayor, Radio mayor, Generatriz Es el cuerpo geométrico que se genera al girar un trapecio rectángulo teniendo como eje el lado perpendicular a las bases.

Tabla 1

Ten en cuenta

En el caso de los conos, si la altura coincide con su eje se dice que es un cono recto, pero si por el contrario el eje y la altura no coinciden estamos hablando de un cono oblicuo.

Sabías que...

Al girar una moneda se obtiene en el espacio una esfera.



Actividades resueltas

Razonamiento

1. ¿Qué cuerpo se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos si miden 6 cm y 8 cm, respectivamente? ¿Cuál es su generatriz?

Solución:

En ambos casos se obtiene un cono.

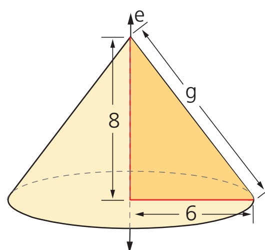


Figura 2

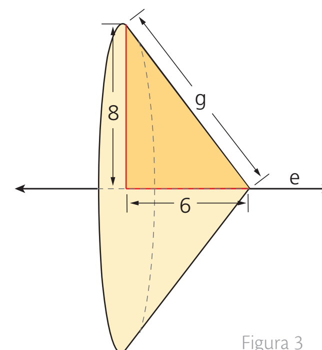


Figura 3

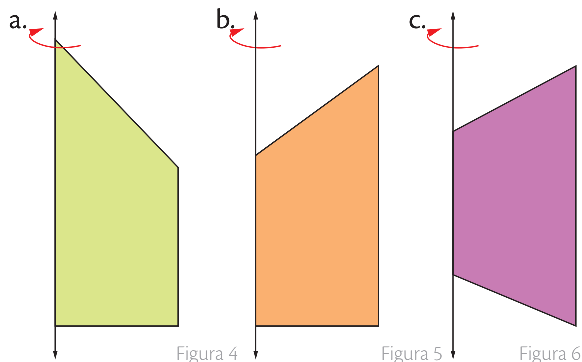
La generatriz mide lo mismo en los dos conos: $g = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm.

Destreza con criterios de desempeño: Dibuja los cuerpos redondos que se obtienen de girar figuras y calcula su generatríz.

Desarrolla tus destrezas

Modelación

2 Dibuja los cuerpos geométricos que se obtienen al girar las siguientes figuras.



Comunicación

3 Dibuja en cada caso el sólido que se pide.

Cono oblicuo	
Cilindro recto	
Cilindro oblicuo	
Cono recto	
Esfera	
Tronco de cono	

4 Escribe qué sólido se obtiene y halla su generatriz:

4 cm, 6 cm, 9 cm, e — Figura 7	Sólido: Generatriz:
12 cm, 7 cm, e — Figura 8	Sólido: generatriz:

5 Escribe verdadero (V) o falso (F) según el caso.

a. Un cono tiene base triangular ( )

b. Un cono tiene dos vértices. ( )

c. Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. ( )

d. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es un rectángulo. ( )

e. La generatriz del cono es mayor que su altura. ( )

f. Un cilindro tiene dos bases ( )

g. Un cilindro no es un poliedro ( )

h. Al aumentar el radio de un cono aumenta el sector circular de su desarrollo lateral. ( )

Resolución de problemas



6 El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?

7 ¿Qué figura del espacio se genera al girar un rectángulo sobre el lado que determina su altura?

8 Experimenta la forma de obtener los sólidos en revolución. Para ello:

a. Elabora un rectángulo, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un trapecio rectángulo usando cartulina o cartón.

b. Ubica un palo de pincho o un sorbete sobre uno de los lados rectos.

c. Gira rápidamente la figura y escribe lo que observas.

7 Áreas de cuadriláteros y triángulos

Explora

En un almacén de materiales para construcción se ofrecen pequeñas baldosas con el siguiente diseño:

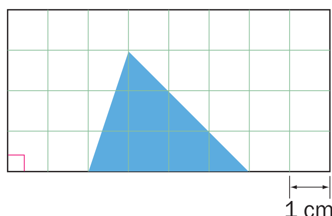


Figura 1

- ¿Cuál es el área total de la baldosa?
- ¿Cuál es el área que ocupa el triángulo central de la baldosa?

Para responder las dos preguntas es necesario conocer cómo calcular el área de los cuadriláteros y los triángulos.

7.1 Áreas del rectángulo, del cuadrado y del paralelogramo

El área de un rectángulo, de un cuadrado y de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura, expresando dichas longitudes en la misma unidad.

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

Ejemplo 1

Para calcular el área total de la baldosa de la Figura 1 se dibujó sobre una cuadrícula (Figura 2). El área de cada cuadrado es de 1 cm^2. Entonces, el rectángulo ocupa exactamente $8 \cdot 4 = 32$ cuadrados.

Por lo tanto, el área de la baldosa es de 32 cm^2.

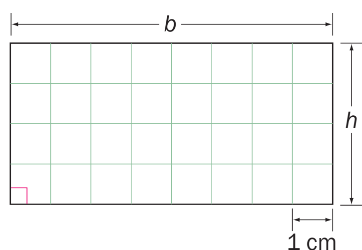


Figura 2

Ejemplo 2

El área del cuadrado de la Figura 3 se halla multiplicando el lado por la altura que equivale a elevar la medida de un lado al cuadrado: $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$.

Como las unidades están dadas en centímetros, el área del cuadrado es de 36 cm^2.

El área de un cuadrado se simboliza como $A = l \cdot l = l^2$.

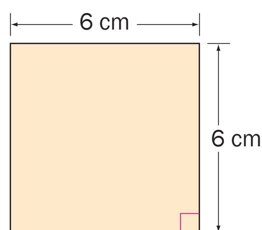


Figura 3

Ejemplo 3

El área del paralelogramo de la Figura 4, se calcula a partir de su relación con el área del rectángulo que tiene su misma base y su misma altura. Observa:

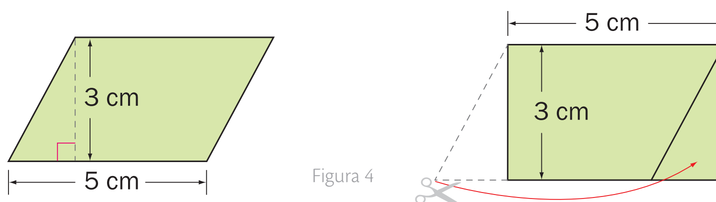


Figura 4

Si se recorta el triángulo rectángulo que se limita con la línea punteada y se pone de manera que complete un rectángulo, se tiene que las dos figuras tienen la misma área. Entonces, el área del paralelogramo es $A = b \times h = 5 \cdot 3 = 15$ cm^2.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Calcula el área de la región azul en la Figura 5.

Solución:

Se expresan las longitudes en la misma unidad de medida:

3 dm = 30 cm   8 dm = 80 cm

Se calculan las áreas de las figuras:

$A▭ = b \cdot h = 50 \cdot 80 = 4\,000$ cm^2

$A□ = l^2 = 30^2 = 900$ cm^2

Se restan las áreas obtenidas para calcular el área de la parte azul:

$A = 4\,000\ cm^2 - 900\ cm^2 = 3\,100\ cm^2$

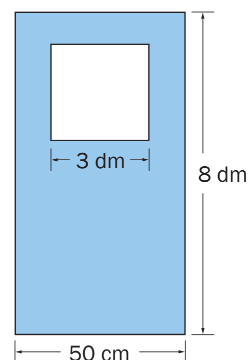


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas

7.2 Área del triángulo

El **área de un triángulo** de base *b* y altura *h* es igual a la mitad del producto de la base por la altura, expresadas en la misma unidad de medida.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejemplo 4

Para hallar el área de un triángulo *ABC*, se refleja este tomando como eje de simetría la recta que pasa por los puntos *A* y *B*, para formar un paralelogramo; observa la Figura 6.

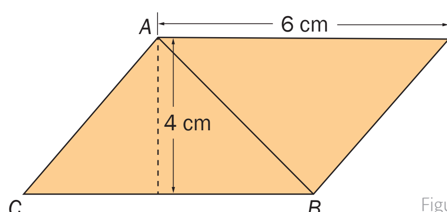


Figura 6

Por lo tanto, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Actividades resueltas

Resolución de problemas

2 El triángulo central de la baldosa de la Figura 1, tiene 3 cm de altura y 4 cm de base, como se muestra en la Figura 7. ¿Cuál es el área de este triángulo?

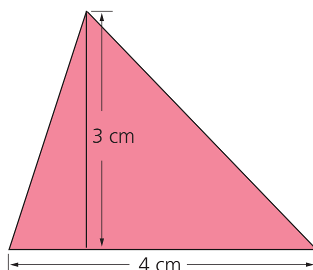


Figura 7

Solución:

El área del triángulo se calcula aplicando la fórmula: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

El triángulo tiene un área de 6 cm^2.

3 Si el área de un triángulo es de 10 cm^2 y su base mide 4 cm. Según esto, ¿cuánto mide su altura?

Solución:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{A \cdot 2}{b} = \frac{10 \cdot 2}{4} = 5 \text{ cm}^2$$

La altura del triángulo es de 5 cm^2.

Ten en cuenta

- En un triángulo rectángulo se puede considerar a uno de los catetos como la base del triángulo y al otro como a su altura.
- Por consiguiente, al aplicar el teorema de Pitágoras, si no se conoce la medida de uno de los catetos de un triángulo, pero sí el valor de la hipotenusa y del otro cateto, se puede hallar sin dificultad el área del triángulo.

Ten en cuenta

Si se conoce el área de un triángulo y alguna de las dos medidas que lo determinan, es decir, su base o su altura, para hallar la otra tendremos que despejarla de la fórmula del área del triángulo.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación



www.e-sm.net/8smt13

Complementa tus conocimientos acerca de áreas de triángulos y cuadriláteros.

7 Áreas de triángulos y cuadriláteros

Ten en cuenta

Las diagonales de un rombo son los segmentos perpendiculares que unen los vértices no consecutivos de dicho paralelogramo.

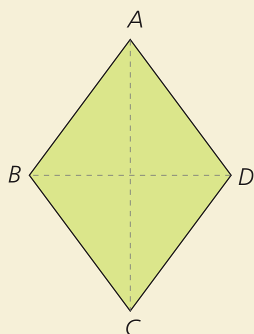


Figura 1

Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

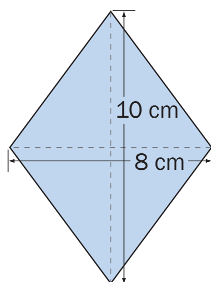
7.3 Área del rombo

El **área de un rombo** se puede calcular conociendo sus diagonales, ya que corresponde a la mitad del área del rectángulo de lados *D* y *d*.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo 5

Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 10 cm y 8 cm, respectivamente.



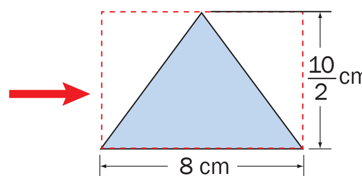


Figura 3

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ m}^2$$

7.4 Área del trapecio

Para hallar el área de un trapecio, se recorta un trapecio congruente y se coloca de manera que los dos compartan uno de los lados no paralelos; de esa manera se obtiene un paralelogramo. Observa la Figura 4.

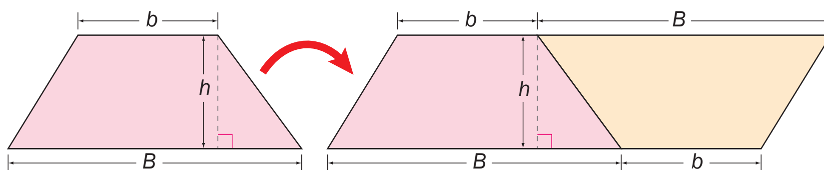


Figura 4

El área del paralelogramo es $A = (B + b) \cdot h$; y la del trapecio es la mitad de ella.

El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de las bases multiplicada por la altura, expresadas en la misma unidad.

$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Ten en cuenta

En los triángulos rectángulos y en los trapecios rectángulos, la altura coincide con uno de sus lados.

h h

Figura 2

Actividad resuelta

Ejercitación

4 Calcula el área del trapecio de la Figura 5.

Solución:

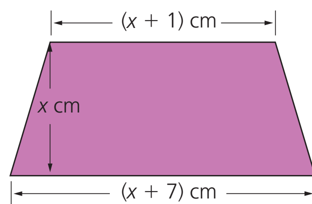


Figura 5

$$\cdot x = \left(\frac{(x + 7) + (x + 1)}{2}\right) \cdot x = \frac{2x + 8}{2}$$

$$\frac{2(x + 4)}{2} \cdot x = (x + 4) \cdot x = x^2 + 4x$$

El área del trapecio es $x^2 + 4x$.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos y cuadriláteros en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

5 Calcula el área de las siguientes figuras.

a. Un paralelogramo de 6 cm de base y 25 mm de altura.

b. Un rectángulo cuya base mide 15 cm y su diagonal 17 cm.

6 Halla el área de la Figura 6, descomponiéndola en rectángulos y cuadrados.

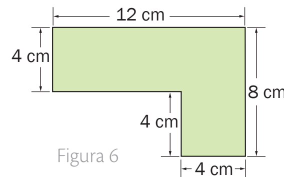


Figura 6

7 Calcula el área de cada figura.

a.

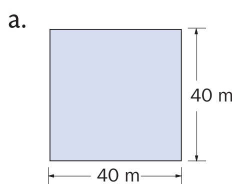


Figura 7

b.

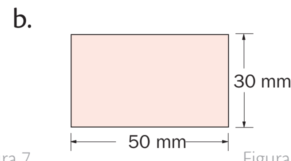


Figura 8

c.

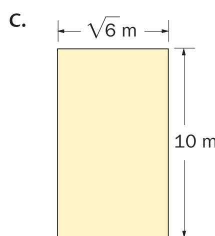


Figura 9

d.

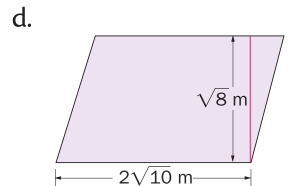


Figura 10

Comunicación

8 Halla el área de los rectángulos y responde:

a.

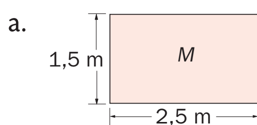


Figura 11

b.

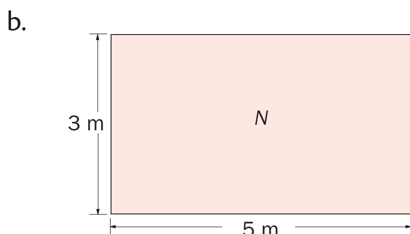


Figura 12

- ¿Qué relación hay entre los lados de las figuras?
- ¿Qué relación existe entre sus áreas?
- Dibuja otros de rectángulos, donde las dimensiones del segundo sean el doble de las del primero. ¿Se mantiene la relación entre las áreas? Explica.

Razonamiento

9 Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 6 dm y 100 cm, respectivamente.

10 Calcula el área de estos trapecios.

a.

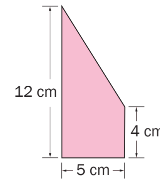


Figura 13

b.

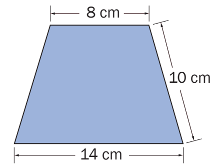


Figura 14

11 Calcula el área de cada polígono, descomponiéndolo en otros polígonos.

a.

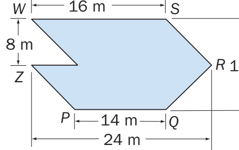


Figura 15

b.

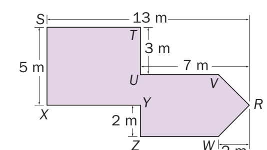


Figura 16

c.

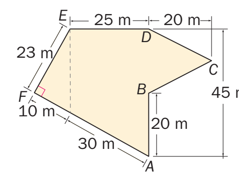


Figura 17

d.

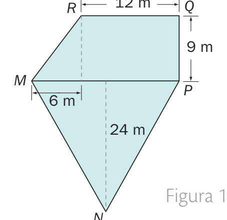


Figura 18

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

12 Un terreno tiene forma de rectángulo y otro, forma de cuadrado. El terreno rectangular tiene 32 m de largo y 18 m de ancho. Si los dos terrenos tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene mayor superficie?

13 Al cortar una pieza rectangular de tela por la diagonal, se generan dos retazos triangulares congruentes. Halla el área de uno de los retazos.

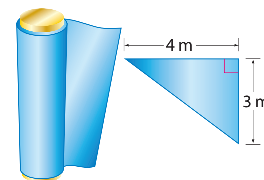


Figura 19

14 Se sabe que el área de un trapezoide simétrico es igual a la mitad del producto de las medidas de sus diagonales. Marisol quiere construir una cometa con las medidas del trapezoide simétrico de la Figura 20. ¿Qué cantidad de papel necesita para hacer la cometa?

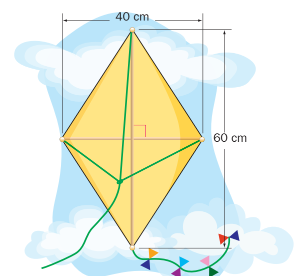


Figura 20

8 Áreas de polígonos regulares e irregulares

Explora

Gabriela diseñó un hexágono regular a partir de la unión de seis triángulos de colores.

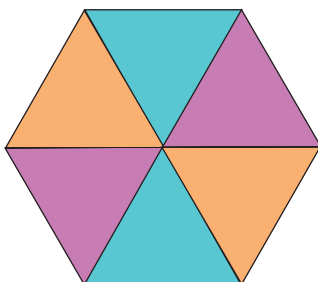


Figura 1

- Si se sabe que cada triángulo tiene un área de 4,15 cm², ¿cuál es el área del hexágono?

Para calcular el área del hexágono basta con multiplicar por 6, el área del triángulo. Luego, se tiene que: $A = 6 \cdot 4{,}15 \text{ cm}^2 = 24{,}9 \text{ cm}^2$.

El área del hexágono es 24,9 cm².

Sin embargo, realizar este cálculo cuando no se conoce el área de cada triángulo implica el uso de algunas fórmulas que estudiarás a continuación.

Ten en cuenta

- La **apotema** de un polígono regular es el segmento que va desde el centro del polígono hasta el centro de cualquiera de sus lados.
- El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

8.1 Área de polígonos regulares

La fórmula general para calcular el **área A** de cualquier **polígono regular** es:

$A = \frac{p \cdot a}{2}$, donde p es su perímetro y a su apotema.

Para calcular la medida de la apotema de un polígono, se aplica el teorema de Pitágoras. Además, el perímetro de un polígono regular, se calcula multiplicando la longitud del lado por el número de lados.

Ejemplo 1

Calcula la medida de la apotema del hexágono regular de la Figura 2. Después, halla su área.

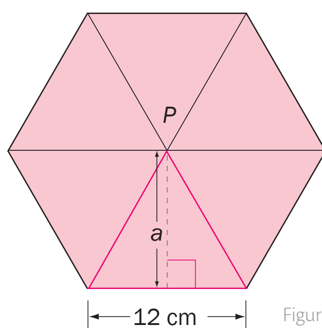


Figura 2

Se considera uno de los seis triángulos equiláteros en los cuales se puede descomponer el hexágono.

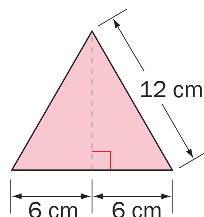


Figura 3

$a^2 = (12 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 108 \text{ cm}^2$

$a = \sqrt{108 \text{ cm}^2}$

$a \approx 10{,}4 \text{ cm}$

El valor de la apotema a del polígono es aproximadamente 10,4 cm.

Para conocer el área del polígono, se debe calcular también su perímetro así:

$$6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}$$

Se reemplazan los valores en la fórmula, como se muestra a continuación:

$$\frac{72 \text{ cm} \cdot 10{,}4 \text{ cm}}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2$$

Entonces, el área del hexágono es 374,4 cm².

Ten en cuenta

- El **radio de un polígono regular** es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el área del pentágono regular de la Figura 4.

Solución:

Un pentágono regular se descompone en 5 triángulos iguales. Entonces, para obtener la apotema se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo *MOB*. Observa:

$a^2 = 18^2 - 10^2 = 224$

$a \approx 14{,}9 \text{ cm}$

$A = \frac{(5 \cdot 20) \text{ cm} \cdot 14{,}9 \text{ cm}}{2} = 745 \text{ cm}^2$

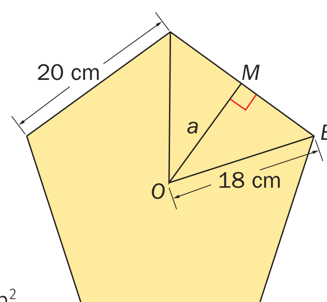


Figura 4

Por lo tanto, el área del pentágono es 745 cm².

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.

8.2 Área de polígonos irregulares

El **área de un polígono irregular** se puede calcular por triangulación o por cuadriculación. Calcular el área de un polígono por triangulación consiste en dividir el polígono en triángulos, calcular sus áreas y sumarlas.

Ejemplo 2

Para calcular el área de la Figura 5, se divide el polígono trazando las diagonales desde uno de sus vértices.

El área del polígono es la suma de las áreas de los tres triángulos en los cuales se ha dividido. Observa la Figura 6

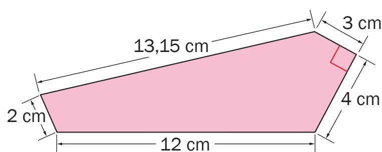


Figura 5

En el triángulo T1 se conocen la base y la altura.

$$A_{T1} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

La altura del triángulo T2 es la hipotenusa del triángulo T1, que se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$h^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, luego $h = \sqrt{25} = 5$.

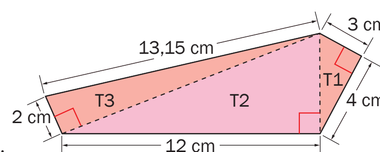


Figura 6

$$A_{T2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

La base del triángulo T3 es la hipotenusa del triángulo T2.

$b^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, entonces $b = \sqrt{169} = 13$.

$$A_{T3} = \frac{13 \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, el área del polígono es:

$$A_{T1} + A_{T2} + A_{T3} = 6 \text{ cm}^2 + 30 \text{ cm}^2 + 13 \text{ cm}^2 = 49 \text{ cm}^2$$

Calular el área de un polígono por **cuadriculación** consiste en dividir el polígono en cuadrados (o fragmentos de cuadrados), calcular sus áreas y adicionarlas.

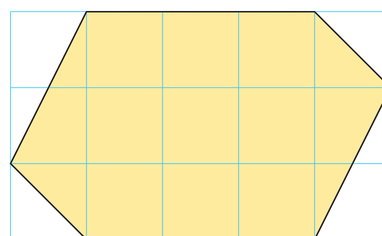
Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el área de polígono de la Figura 7

Solución:

Para calcular el área del polígono de la figura 7, se dibuja sobre él una cuadrícula cuyos cuadrados tengan 1 cm de lado. El polígono tiene nueve cuadrados completos y seis cuadrados incompletos que, al reorganizarlos, forman tres cuadrados.


Figura 7

Entonces, el área del polígono es $A = 9 + 3 = 12$ cm².



CULTURA del Buen Vivir

La responsabilidad

Una persona responsable es alguien que asume una posición de cumplimiento y entrega frente a un compromiso o un deber que le fue asignado.

- Menciona cuatro características o acciones morales que consideres enemigos del sentido de responsabilidad.

8 Áreas de polígonos regulares e irregulares

Ten en cuenta

No en todos los casos se puede calcular el área de una figura plana por triangulación o por cuadriculación. A veces, la descomposición de la figura en partes da lugar a polígonos diferentes y hay que calcular sus áreas respectivas.

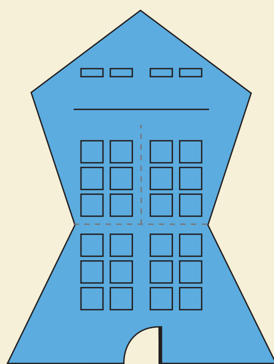


Figura 8

Por ejemplo, el área de esta figura, que es el plano de una sala de reuniones, se puede descomponer en un pentágono regular y en un trapecio isósceles.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 Calcula el área de la sala de conferencias que se muestra en la Figura 9.

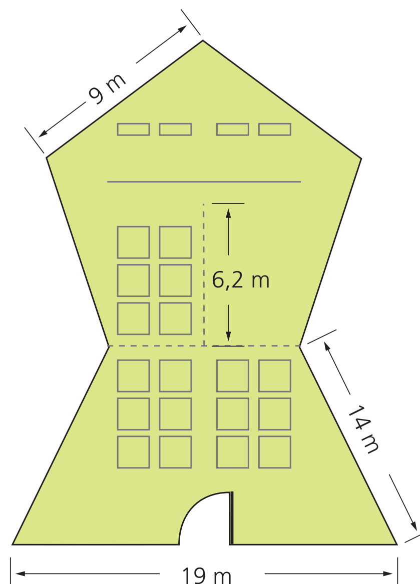


Figura 9

Solución:

Para hallar el área de la sala, se puede descomponer en un pentágono regular y en un trapecio isósceles.

La parte superior corresponde a un pentágono regular de 9 m de lado y de apotema de 6,2 m.

Por lo tanto, su área es:

$$A_1 = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 9) \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5 \text{ m}^2$$

La parte de inferior es un trapecio isósceles, cuyas bases miden 19 m y 9 m.

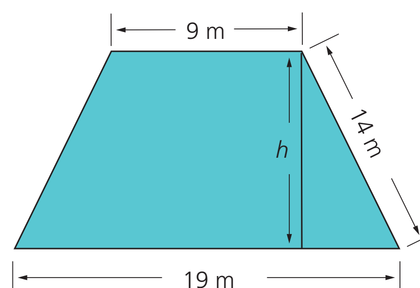


Figura 10

Luego el área se calcula así

$$14^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = \sqrt{14^2 - 5^2} = 13{,}08 \text{ m}$$

$$A_2 = (B + b) \cdot \frac{h}{2} = (19 + 9) \cdot \frac{13{,}08}{2} = 183{,}12 \text{ m}^2$$

El área total de la sala es la suma de las áreas de las dos figuras es:

$$A_T = A_1 + A_2 = 139{,}5 + 183{,}12 = 322{,}62 \text{ m}^2$$

Entonces, el área total de la sala de conferencias es 322,62 m^2.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Halla el área de un decágono regular de 5 cm de lado y 9 cm de apotema.

4 ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 8 cm de lado y 5 cm de radio?

5 Halla el área del polígono regular de la Figura 11.

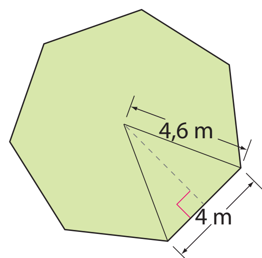


Figura 11

6 Calcula el área de cada polígono regular.

a.

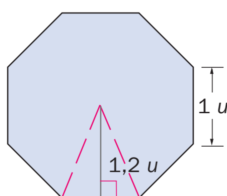


Figura 12

b.

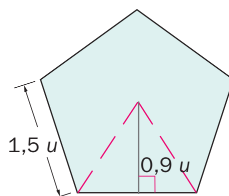


Figura 13

c.

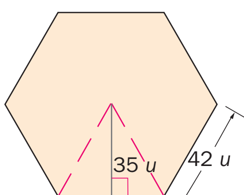


Figura 14

d.

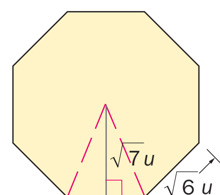


Figura 15

7 Calcula el área de las siguientes figuras por cuadriculación, considerando que el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide 1 cm.

a.

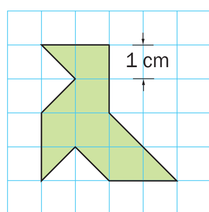


Figura 16

b.

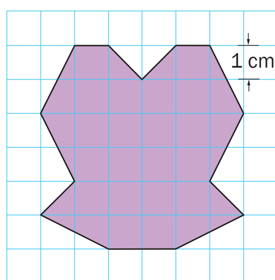


Figura 17

8 Calcula por triangulación el área del trapezoide de la Figura 18

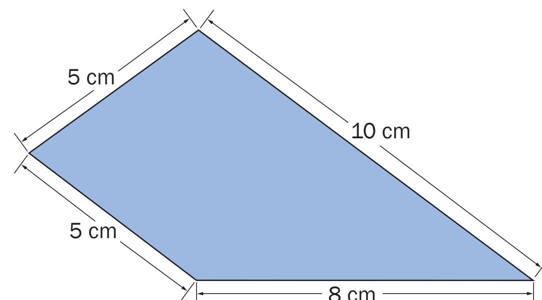
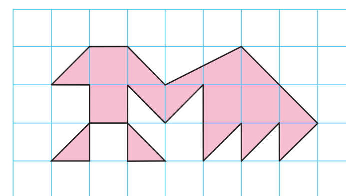


Figura 18

Razonamiento

9 Calcula el área de la Figura 19 por cuadriculación, considerando que el lado de cada cuadrado mide 1 cm.


Figura 19

10 Calcula el área de las siguientes figuras por triangulación.

a.

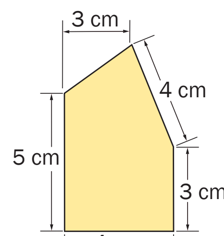


Figura 20

b.

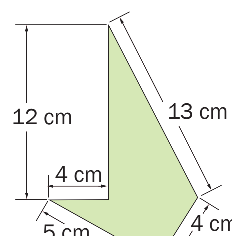


Figura 21

Resolución de problemas

11 Julia construyó una casita de muñecas con unos pedazos de madera que ha encontrado en el jardín. El diseño de la casa no es regular por la forma de la madera.

Ella quiere decorar el piso con papel adhesivo. ¿Cuántos centímetros cuadrados necesita para el suelo del dormitorio si su forma es como la de la Figura 22?

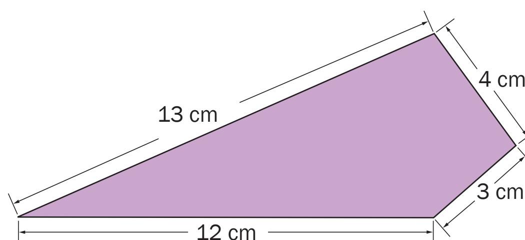


Figura 22

Practica Más

Áreas de triángulos y cuadriláteros

Razonamiento

1. Halla el área a los siguientes triángulos y cuadriláteros.

a.

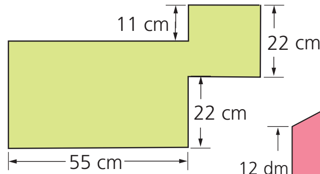


Figura 1

b.

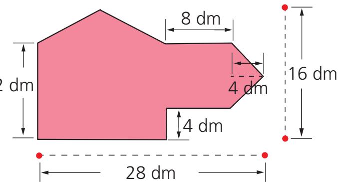


Figura 2

c.

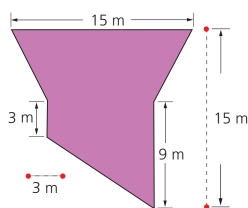


Figura 3

d.

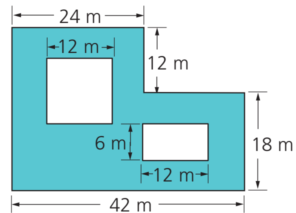


Figura 4

e.

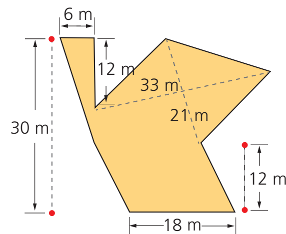


Figura 5

f.

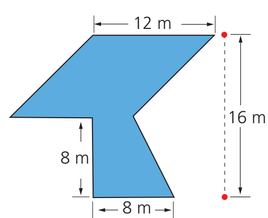


Figura 6

Resolución de problemas

2. Calcula la cantidad de vidrio que se necesita para elaborar cada estructura.

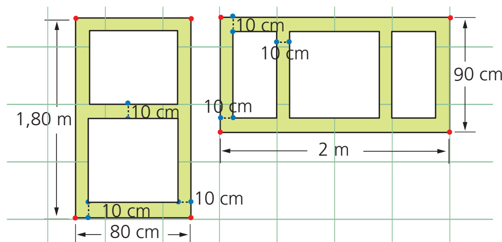


Figura 7

Razonamiento

3. Representa la figura y halla su área en cada caso.

a. Un rectángulo de altura 7 cm y diagonal de 14 cm.

b Un rombo de lado 5 cm y diagonal menor que 6 cm.

c. Un triángulo isósceles de 8 dm en el lado desigual y de 7 dm en los lados congruentes.

Área de polígonos regulares e irregulares

Ejercitación

4. Calcula el área de estos polígonos regulares.

a.

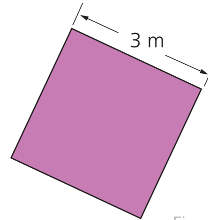


Figura 8

b.

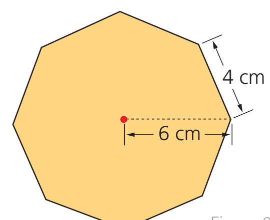


Figura 9

c.

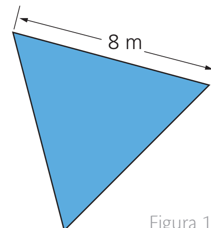


Figura 10

d.

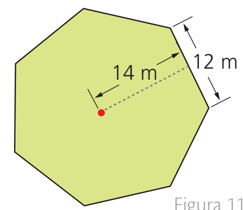
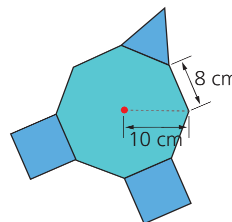


Figura 11

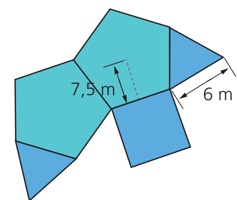
Razonamiento

5. Determina el área de las figuras compuestas.

a.



b.



6. Halla el área de cada polígono irregular.

a.

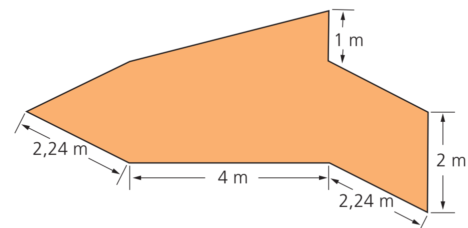


Figura 12

b.

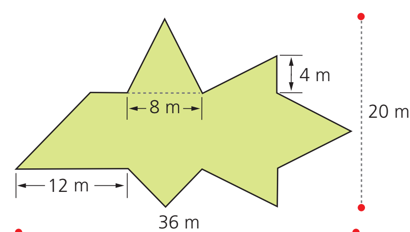


Figura 13

Resolución de Problemas

Estrategia: Descomponer una figura

Problema

El lado del cuadrado grande del *tangram* mide 8 cm.

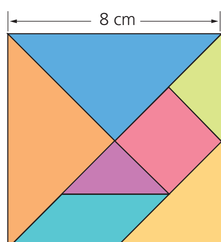


Figura 1

Entonces, ¿cuál es el área de cada figura del *tangram*?

1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son los datos que proporciona el problema?
  R: El conocido juego del *tangram* en un cuadrado de 8 cm de lado.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: ¿Cuál es el área de cada una de sus siete piezas?

2. Crea un plan

- Relaciona cada figura con el lado del cuadrado grande y calcula el área de cada pieza.

3. Ejecuta el plan

- Los triángulos rojo y azul son congruentes, con base de 8 cm y altura de 4 cm.

$$A = \frac{8\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 16\text{ cm}^2$$

- El triángulo amarillo es un triángulo rectángulo de 4 cm de base y 4 cm de altura.

$$A = \frac{4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 8\text{ cm}^2$$

- Los dos triángulos pequeños son congruentes. Tienen 4 cm de base y 2 cm de altura.

$$A = \frac{4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2$$

- El paralelogramo de 4 cm de base y 2 cm de altura.

$$A = 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$$

- El cuadrado pequeño tiene de lado la mitad de la hipotenusa del cuadrado amarillo.

$$H^2 = (4\text{cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = 32\text{ cm}^2$$
$$H = \sqrt{16 \cdot 2}\text{ cm} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

- El lado del cuadro pequeño es $2\sqrt{2}$ cm y su área se calcula

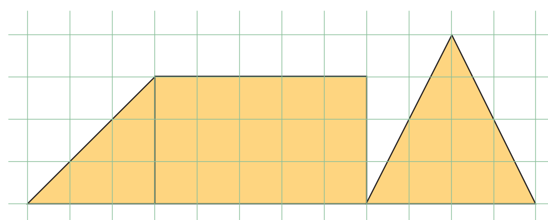
con el producto $\left(2\sqrt{2}\ cm\right) \cdot \left(2\sqrt{2}\ cm\right) = 8\text{ cm}^2$

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la suma de todas las áreas internas es igual al área del cuadrado grande.

Aplica la estrategia

1. En la figura, cada "cuadrito" mide 1 cm de lado.


Figura 2

¿Cuáles son las áreas del polígono y del triángulo de la de la figura?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

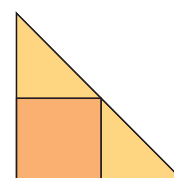
2. Francisco elaboró una cometa con forma de rombo. Si la diagonal mayor mide 68 cm y la diagonal menor mide la mitad de la mayor, ¿cuál es la medida de la superficie de la cometa?

3. En un salón de juegos de un colegio, sobre el suelo, se pintó un hexágono regular de 120 cm de lado. ¿Qué área del salón está cubierta por el hexágono?

4. La base mayor de un trapecio isósceles es de 11 cm y los lados inclinados miden 5 cm cada uno. Si la base menor mide 5 cm, ¿cuál es el área del trapecio?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la siguiente figura y resuélvelo.


Figura 3

Prueba Ser Estudiante



A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Si uno de los ángulos de un triángulo mide 91°, corresponde a un triángulo:

A. acutángulo

B. isósceles

C. obtusángulo

D. rectángulo

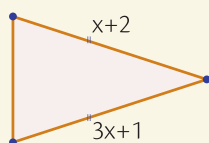
2. En el triángulo isósceles de la figura, la medida de los lados iguales del triángulo es:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$



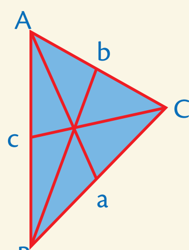
3. El punto de intersección de las líneas de la figura es el:

A. Incentro

B. baricentro

C. circuncentro

D. ortocentro



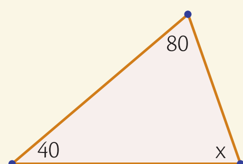
4. La medida del ángulo x del triángulo de la figura es:

A. 40°

B. 60°

C. 80°

D. 100°



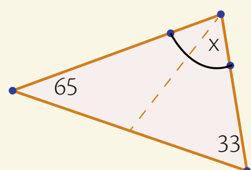
5. La medida del ángulo x es:

A. 41°

B. 48°

C. 46°

D. 41°



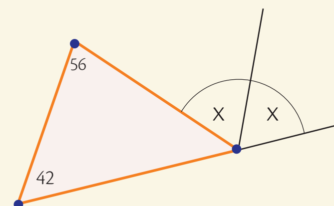
6. La medida del ángulo x es:

A. 98°

B. 82°

C. 49°

D. 41°



7. Es posible formar un triángulo con los segmentos del literal:

A.
a: 30 cm
b: 18 cm
c: 15 cm

B.
a: 62 cm
b: 38 cm
c: 21 cm

C.
a: 33 cm
b: 22 cm
c: 14 cm

D.
a: 70 cm
b: 48 cm
c: 21 cm

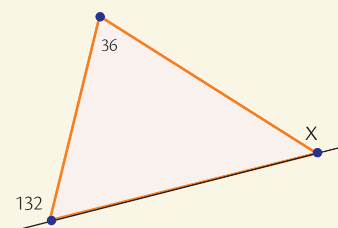
8. La medida del ángulo x es:

A. 84°

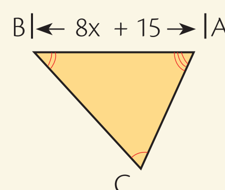
B. 96°

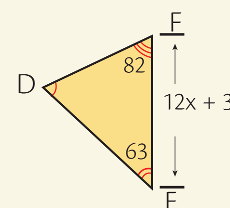
C. 112°

D. 124°



9. Si los triángulos ABC y DEF son congruentes.Los valores de x y C son respectivamente:





A. X = 2, D = 30

B. X = 3, D = 35

C. X = 2, D = 63

D. X = 3, D = 82

Indicadores de logro:

- Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados.
- Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares.
- Aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos.
- Explica los procesos de solución empleados en la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.

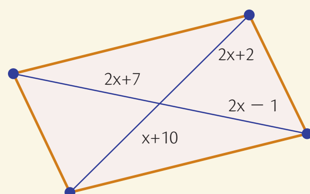
10. La medida de la diagonal es:

A. 6

B. 12

C. 21

D. 30



11. Al rotar la figura en el eje y el sólido que se obtiene es:

A. cilindro

B. esfera

C. cono

D. tronco de cono



12. El cuerpo generado por la revolución de un rectángulo es:

A. cono

B. esfera

C. cilindro

D. tronco de cono

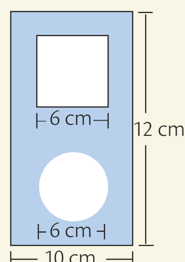
13. El área azul es:

A. $84 - 9\pi$

B. $120 - 9\pi$

C. $108 - 9\pi^2$

D. $120 - 9\pi^2$



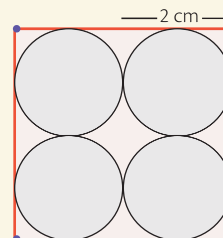
14. El área de la región rosada es:

A. $4 - 4\pi$

B. $1 - 4\pi$

C. $1 - 2\pi^2$

D. $2 - 4\pi^2$



15. El área de un heptágono de 5cm de lado y apotema 4cm es :

A. $100\ cm^2$

B. $70\ cm^2$

C. $60\ cm^2$

D. $40\ cm^2$

16. El área del polígono de la fig. es:

A. $15\ cm^2$

B. $18\ cm^2$

C. $20\ cm^2$

D. $22\ cm^2$

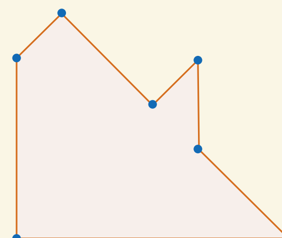


Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

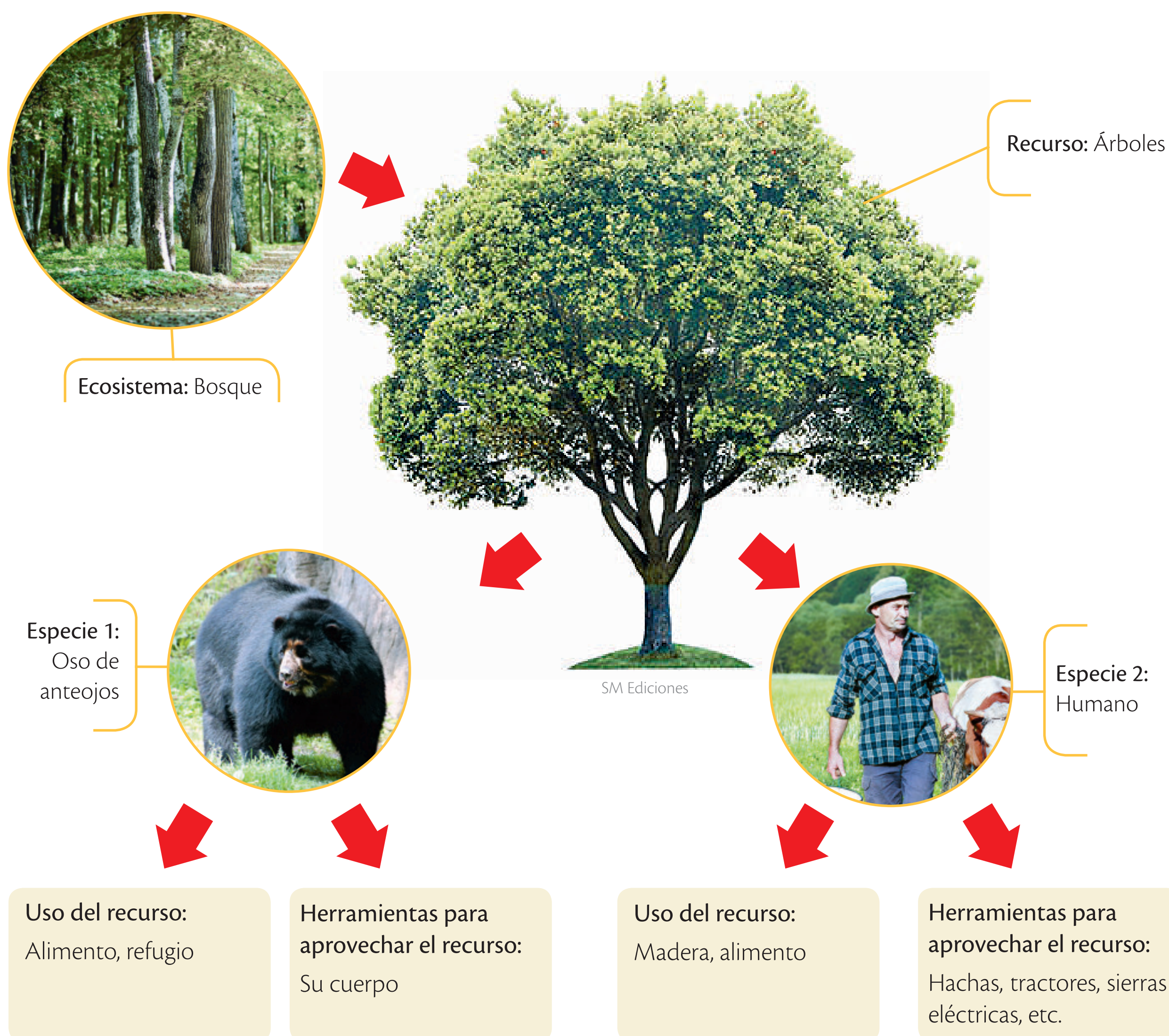
Compite para sobrevivir

Cada ecosistema ofrece los recursos necesarios para que los seres vivos que se encuentran en él puedan sobrevivir. Sin embargo, hay varias especies que buscan el mismo recurso y por lo tanto, compiten por llegar a él.
Esta relación de competencia es la base del equilibrio ecológico, pero ¿qué pasa cuando una especie lleva las de ganar en esta competencia?


SM Ediciones

Competencia interespecífica

La especie humana, al utilizar múltiples recursos, entra en competencia con el resto de especies, agotando los recursos disponibles y llevándolas a la extinción.



SM Ediciones

Uso del recurso: Alimento, refugio

Herramientas para aprovechar el recurso: Su cuerpo

Uso del recurso: Madera, alimento

Herramientas para aprovechar el recurso: Hachas, tractores, sierras eléctricas, etc.

Conviértete en un consumidor consciente

Para reducir los efectos de la competencia con las demás especies, puedes buscar productos que tengan sellos ambientales que certifiquen que el uso que hacen de los recursos naturales es adecuado. A continuación verás tres tipos de sellos, averigua qué significa cada uno y la próxima vez que vayas de compras búscalos y prefiere los productos certificados.



Tomado de: http://www.ambiente.gob.ec



Tomado de: http://www.ambiente.gob.ec



Tomado de: http://image.slidesharecdn.com

....

....

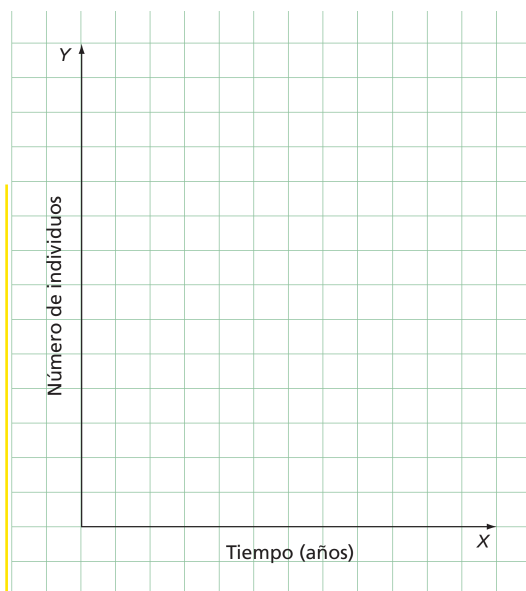
....

....

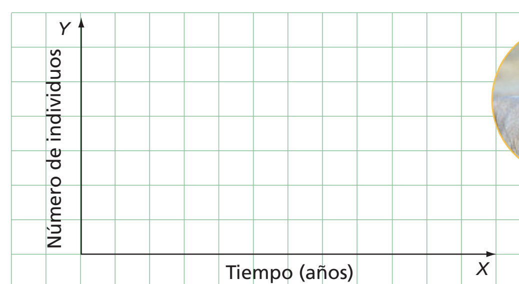
Conexión con las matemáticas

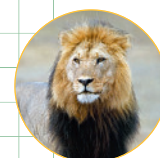
En la sabana africana existen dos tipos de felinos, los leones y los leopardos. Ambos se alimentan de casi lo mismo: variedad de ciervos, aves y otras presas.

1. En una gráfica, representa la dinámica de las poblaciones de depredadores y presas en el tiempo, asumiendo que la cantidad de depredadores es limitada.



2. Imagina un escenario en el que los leones son más efectivos cazando que los leopardos, ¿qué pasará con la población de leones?, ¿qué pasará con la población de leopardos? Representa los resultados.




SM Ediciones




SM Ediciones

Habilidades digitales

Fuentes de información confiables

A causa de la saturación de información que existe en la web, debemos aprender a reconocer cual es una fuente confiable y cual no. Con la ayuda de estos cuatro instrumentos.

1 Bibliotecas en línea gratis porque son:

a. Actualizadas

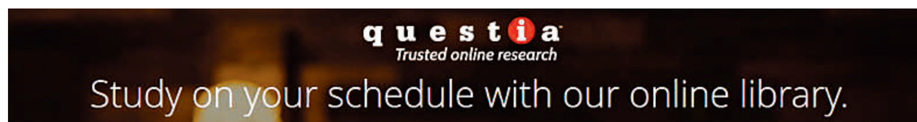
b. Usan referencias pertinentes

c. Autores reconocidos

d. Ahorran tiempo de búsqueda.

Fuentes primarias





2 Fuentes Secundarias

Son sitios de difusión y presentación de documentos originales, son fuentes secundarias sobre estudios significativos y didácticos.



SlideShare para Presentaciones

LinkedIn Empresa

Para todos

Scribd.

3 Herramientas de búsqueda

Son herramientas de búsqueda específica.





4 Navegadores

Estos navegadores tienen características importantes a la hora de hacer búsquedas, temas elegidos, hacen el aprendizaje significativo.







Aprende más

Debemos procurar usarlos en nuestros trabajos de investigación desde los niveles básicos de educación hasta los superiores y para la práctica de valores. Evitemos el plagio.

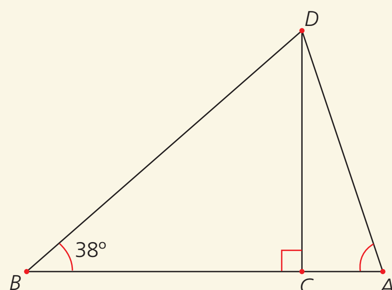
Evaluación de la Unidad



Triángulos

Ejercitación

1. Determina la medida de $\measuredangle DAB$ si $\measuredangle CDA = 19°$

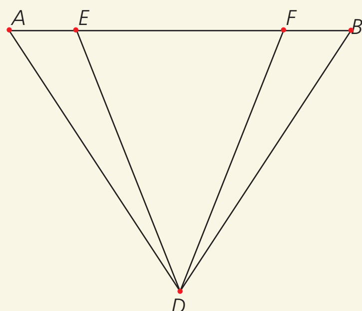


a. 29° **b.** 52°

c. 71° **d.** 90°

Ejercitación

2. Sí $\triangle ABD$ es isósceles y $\measuredangle ADE \cong \measuredangle BDF$, ¿el triángulo EDF es isósceles? Justifica tu respuesta



Líneas notables del triángulo

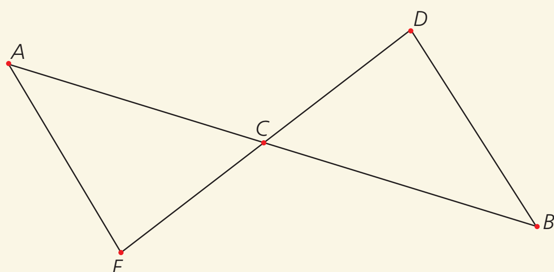
Comunicación

3. Comprueba que las alturas correspondientes de dos triángulos congruentes son congruentes

Triángulos congruentes

Razonamiento

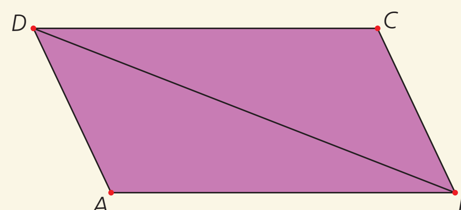
4. Demuestra que $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ sí C es el punto medio de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.



Cuadriláteros

Razonamiento

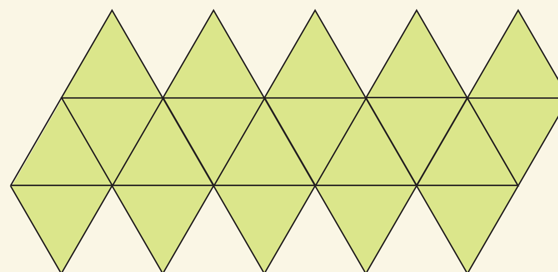
5. Demuestra que sí $ABCD$ es un paralelogramo, la diagonal $\overline{BD}$ determina dos triángulos congruentes



Poliedros

Modelación

6. El siguiente es un modelo plano de un poliedro

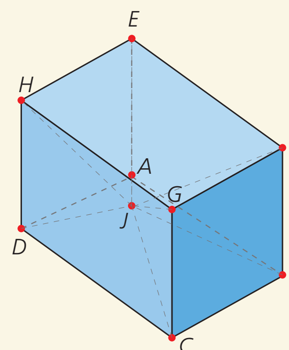


¿Cuántas aristas tiene el poliedro?

a. 16 **b.** 20

c. 30 **d.** 42

7. ¿Qué tipo de sólido forman los puntos $BCGFJ$?



Cuerpos redondos

Modelación

8. Determina una expresión para calcular el área de un trapecio isósceles si la base mayor mide tres veces la longitud de la base menor.

9. Determina que figuras se deben girar para obtener un tronco de cono y un cono.

Indicadores de logro:
- Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados.
- Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares.
- Aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos.
- Explica los procesos de solución empleados en la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de los resultados.

Áreas de triángulos y cuadriláteroscomún

Razonamiento

10. Al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro 140 dm se obtiene un nuevo cuadrado. Halla el área del segundo cuadrado

Ejercitación

11. La suma de las medidas de la altura y la base de un rectángulo es igual a 56 m. Si una de las medidas es tres cuartos de la otra, la medida del área del rectángulo es

a. 108 m^2

b. 192 m^2

c. 363 m^2

d. 768 m^2

Área de polígonos regulares e irregulares

Razonamiento

12. El área de un heptágono regular, de lado 15 cm, es igual a 656,36 cm^2. La medida de la apotema es

a. 7,5 m^2

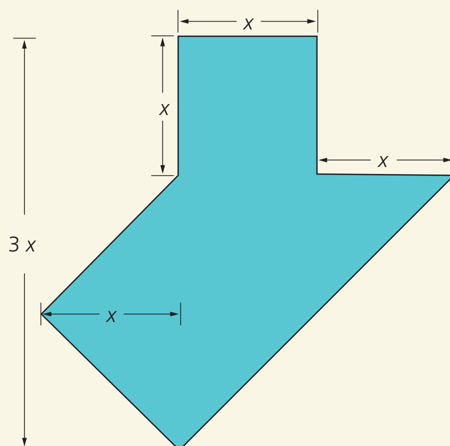
b. 12,46 m^2

c. 15,58 m^2

d. 19,2 m^2

Modelación

13. Determina el área de la figura si $x = 4$ cm.

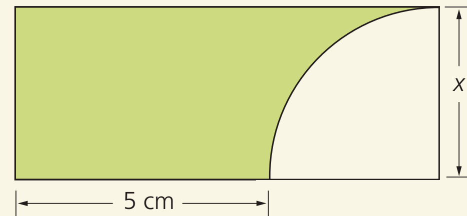


a. 16 m^2 **b.** 36 m^2

c. 48 m^2 **d.** 64 m^2

Ejercitación

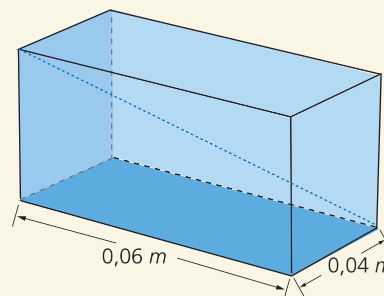
14 Halla el área de la región sombreada si el perímetro del rectángulo es 26 cm.



Propiedades métricas de prismas y pirámides

Razonamiento

15. Con base en la figura responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda.



a. El sólido es un paralelepípedo ( )

b. El segmento azul representa la generatriz del sólido ( )

c. Sí la diagonal mide 8,775 cm, la altura del sólido es igual a 5 cm ( )

d. El área de la cara frontal es igual a 0,24 m ( )

e. El área de la cara lateral es igual a 0,16 m ( )

Resolución de problemas

16. Se necesita forrar con papel regalo una caja de 48 cm de largo, 35 cm de ancho y 26 cm de alto. Si las dimensiones de la hoja de papel regalo son 45 cm de largo por 30 cm de ancho, ¿cuántas hojas de papel regalo se necesitan?

6 Estadística y probabilidad

BLOQUE

Estadística y probabilidad

La mayoría de los avances en la Estadística son consecuencia del interés de los científicos por encontrar modelos que interpreten y predigan el comportamiento de fenómenos en las ciencias naturales, las ciencias sociales, la economía y las ciencias médicas, entre otras áreas del conocimiento.

- Averigua acerca del origen de la Estadística y la Probabilidad.



Cultura del Buen Vivir

La perseverancia

El valor de la perseverancia implica el esfuerzo continuo para lograr las metas y los objetivos propuestos en la vida y la capacidad de buscar soluciones ante los obstáculos que se presenten en el camino.

- Describe tres objetivos imposibles de lograr sin la perseverancia.

Aprenderás...

- Medidas de posición central y no central
- Medidas de dispersión
- Experimentos y sucesos aleatorios
- Probabilidad

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

La probabilidad de ser mujer

Como quizás ya sepas, la probabilidad de nacer niño o niña es la misma. Esto implica que hay aproximadamente el mismo número de hombres y mujeres en el mundo.

¿Sabes a qué se debe que estas probabilidades sean iguales? Las cadenas de ADN forman cromosomas que determinan muchos rasgos del ser humano, pero hay dos cromosomas en particular, llamados X y Y, que determinan el sexo de un hijo.

Las mujeres tienen dos cromosomas de tipo X y transmiten al embrión uno u otro con la misma probabilidad. Los hombres, por su parte, tienen un cromosoma X y uno Y; también le aportan al embrión uno u otro con la misma probabilidad. El resultado es una pareja de cromosomas que podrá ser XX o XY. Si se da una pareja XX será una niña y si es XY será un niño.

Ahora, fíjate en los siguientes datos de las Naciones Unidas (2009) sobre hombres y mujeres.

- El número total de **mujeres** en el mundo es de **3 386 millones**, mientras que el número de **hombres** asciende a **3 442 millones**.
- En ningún **país democrático** el número de **mujeres** en el **parlamento** llega al **50%**.
- En la **mitad** de los **países** del mundo, la tasa de **analfabetismo** de las **mujeres** es **superior** a la de los **hombres**, tanto en jóvenes como en adultos.

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 9.

Actividades

Interpreta

1. Cuenta el número de niños y niñas de tu grado. ¿La frecuencia relativa es del 50%? Si no es así, ¿a qué atribuyes esta diferencia?

Argumenta

2. Utilizando los datos de las Naciones Unidas, calcula la probabilidad de nacer mujer en el mundo. ¿En cuánto difiere de la probabilidad teórica?

Propón

3. Comenta tu opinión sobre la diferencia en la tasa de analfabetismo entre hombres y mujeres. ¿Crees que está relacionada con las funciones que las niñas cumplen en los países en vías de desarrollo?

1 Estudio estadístico: Población, muestra y variables

Explora

Mateo quiere saber cuál es el deporte preferido por los mil estudiantes de su colegio.

- ¿Qué podría hacer Mateo para resolver su inquietud?

Mateo podría preguntarle a cada uno de los estudiantes del colegio acerca de su deporte favorito, pero dado que se trata de un colegio con más de 3 000 estudiantes, esto no es práctico.

Entonces él podría, en su defecto, tomar al azar a diez estudiantes de cada curso y hacerles la pregunta. Con ello resolvería su inquietud.

La **estadística descriptiva** es una ciencia casi tan antigua como la humanidad. Comprende el conjunto de métodos, estrategias y procedimientos para **recolectar**, **organizar** y **analizar** datos que se pueden observar en una **población** o en una **muestra**.

Algunos conceptos importantes de un estudio estadístico son:

- La **población**. Es el grupo de elementos o características con propiedades comunes sobre las cuales se dirige un estudio estadístico.
- La **muestra**. Es un grupo más pequeño tomado de la población pero que permite obtener la misma información. A cada uno de los elementos de la población o la muestra se le denomina **individuo**.
- Un **dato**. Es el valor de la variable asociada a un elemento de la población o de la muestra.

  La Figura 1 muestra la relación que existe entre población, muestra, individuo y dato.
- Una **variable**. Es la característica de interés de cada individuo. Puede ser **cualitativa** (o de atributos), cuando se refiere a una cualidad de un elemento de la población, o **cuantitativa** (o numérica), cuando cuantifica un elemento de la población o de la muestra.

Ten en cuenta

Un estudio estadístico especifica la metodología a utilizar y los elementos considerados para el análisis de los datos que solucione el problema motivo del estudio.

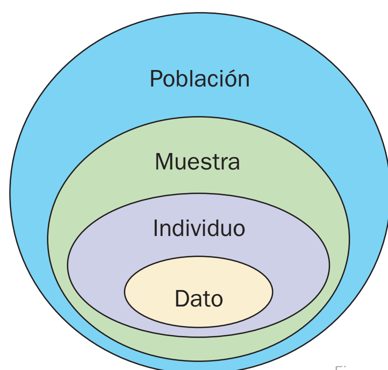


Figura 1

Ejemplo 1

Si a cada uno de los integrantes de un curso se le pregunta la edad, el peso o el número de hermanos, el de un estudio estadístico se refiere a variables cuantitativas, pero si a cada uno se le pregunta por su color preferido o por su lugar de nacimiento, se trata de variables cualitativas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 En un centro médico se realizó una encuesta para establecer la edad, el peso y el género de los pacientes atendidos durante una semana. Especifica los elementos considerados en este estudio estadístico.

Solución:

Los elementos de este estudio estadístico se presentan en la Tabla 1.

Muestra	Individuo	Variables	Dato (Ejemplo)
Pacientes encuestados durante la semana	Cada uno de los pacientes encuestados	Edad (cuantitativa) Peso (cuantitativa) Género (cualitativa)	Edad: 23 años Peso: 62 kg Género: femenino

Tabla 1

Ten en cuenta

Hacia el año 3000 a. C., los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque.

Por su parte, los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides, en el siglo XXXI a. C.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Identifica la población, la muestra y un individuo en cada uno de los siguientes estudios estadísticos.

a. Estudio sobre las materias preferidas por los estudiantes de un colegio. Se hace una encuesta a doce estudiantes de cada curso.

b. Estudio sobre la emisora radial preferida por las mujeres de una ciudad. Se entrevista a 200 mujeres de la ciudad.

c. Estudio sobre las condiciones en que se mantienen los animales del zoológico de Guayllabamba. Se estudian dos animales de cada especie.

d. Estudio sobre la opinión de una comunidad respecto a sus gobernantes. Se preguntó a dos mil personas de la zona rural y a quinientas de la zona urbana.

e. Estudio sobre la contaminación de los ríos de Ecuador. Se estudió un río de cada una de las provincias

3 Propón un título para cada uno de estos estudios. Ten en cuenta la población y la muestra.

a. Población: Niños y niñas ecuatorianos menores de cinco años

Muestra: Niños y niñas de una ciudad

Título:

....

b. Población: Jugadores profesionales de fútbol

Muestra: Jugadores profesionales de tres equipos

Título:

....

Ejercitación

4 Indica a qué tipo de variable se refieren los estudios estadísticos que se presentan a continuación.

a. Equipo de fútbol preferido por los estudiantes de un curso.

b. Número de personas que realizan transacciones por hora en un cajero automático.

c. Estatura de los integrantes de los equipos de baloncesto de un campeonato regional.

d. Número de hijos por familia de los habitantes de un conjunto residencial.

Razonamiento

5 Indica cuál es la población de cada uno de los estudios estadísticos registrados en la Tabla 2 y explica si es conveniente tomar una muestra.

Estudio estadístico	Población	Muestra
Goles marcados por cada jugador de un equipo		
Comida preferida por los clientes de un restaurante		
Número de calzado de los miembros de una familia		
Número de hermanos de los habitantes de una ciudad		

Tabla 2

6 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. La muestra tiene más elementos que la población.

b. El lugar de nacimiento de una persona es una variable cuantitativa.

c. La estatura de una persona es una variable cuantitativa.

d. El tiempo de duración de un viaje en avión es una variable cualitativa.

e. El número de atrasos a clase de un estudiante es una variable cualitativa.

Resolución de problemas



7 Mariana hace un estudio sobre el estado de los pupitres de su colegio. ¿Cuál es la población del estudio de Mariana? ¿Cómo podría definir una muestra de esa población? ¿A qué corresponde un individuo de este estudio?

8 Plantea dos estudios que se puedan realizar en tu comunidad. Identifica la población, la muestra y un individuo de cada estudio.

9 Explica qué ventajas tiene realizar un estudio estadístico a toda la población de una comunidad. Comenta además qué desventaja tiene elegir una muestra.

10 En un colegio se quiere hacer un estudio sobre las expectativas de los estudiantes en relación con la excursión de final del año. ¿Qué variables cuantitativas y cualitativas se deberían tener en cuenta para hacer este estudio?

1 1.1 Representación de información estadística

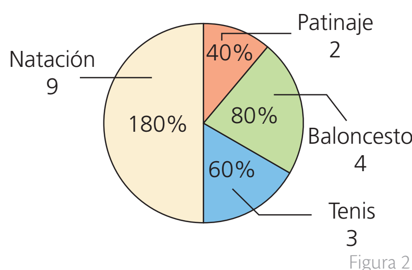


Figura 2

Ten en cuenta

La **frecuencia absoluta** indica el número de veces que se repite un dato. La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de datos.

Ten en cuenta

Los Gráficos de bastones son muy similares a los de barras, se recomienda su uso para variables cualitativas o cuantitativas discretas cuando sus respectivas categorías son numerosas.

Actividad resuelta

Ejercitación

11 Construye la gráfica circular con los datos de la Tabla 3.

Deporte preferido	Cantidad de personas
Natación	9
Tenis	3
Baloncesto	4
Patinaje	2
TOTAL	18

Tabla 3

Solución:

Se halla la cantidad de grados que le corresponde a cada deporte mediante la relación que se indicó con anterioridad. Después, se ubican las proporciones en el círculo (Figura 2).

Natación: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{9} \Rightarrow n° = 180°$ Baloncesto: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{4} \Rightarrow n° = 80°$

Tenis: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{3} \Rightarrow n° = 60°$ Patinaje: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{2} \Rightarrow n° = 40°$

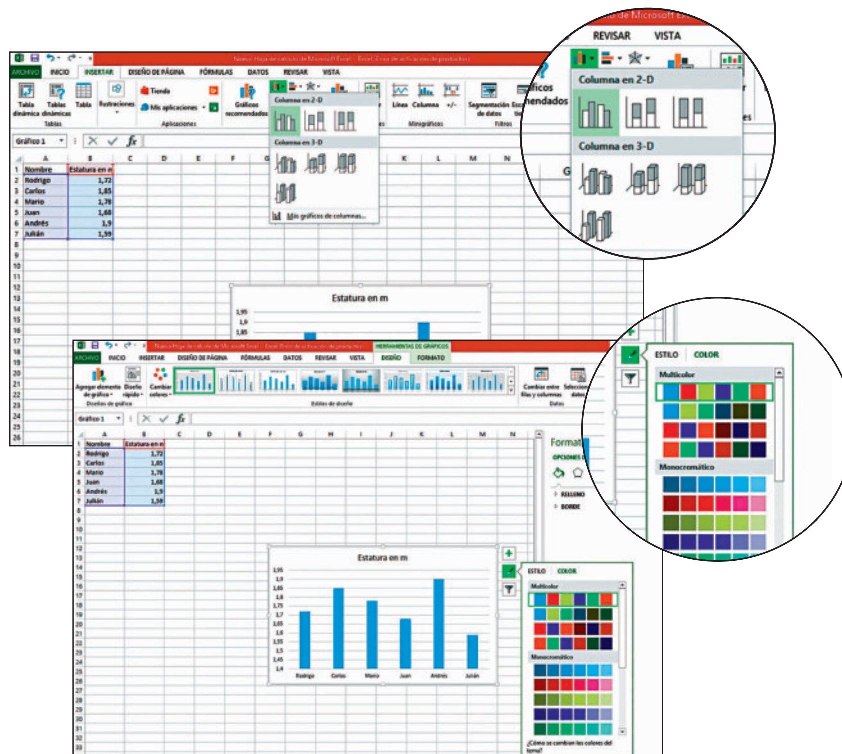
MatemaTICS

Construye una gráfica de barras con Excel

- Para crear una gráfica de barras en Excel debes tener listos los datos e ir a la opción *Insertar*. Dentro del grupo *Gráficos* pulsa el botón *Insertar gráfico de barras*, y finalmente selecciona la opción *Columna agrupada*.

- Una opción para cambiar el color de las barras es seleccionar el gráfico y hacer clic en el botón *Estilos de gráfico* e ir a la sección *Color*, donde puedes elegir el tono de tu preferencia.

  Si ninguno de los temas de colores contiene el color que deseas utilizar, puedes abrir el panel de tareas e ir a la sección *Relleno*; allí podrás elegir el tono que prefieras o el que te permita visualizar y comparar mejor los datos.



Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada, y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

12 Lee la información y resuelve.

A 30 jóvenes se les preguntó sobre sus revistas favoritas. El resultado se recoge en la Tabla 4.

Tipo	Número de jóvenes
Deportes	10
Científicas	2
Económicas	12
Animales	5
Históricas	1

Tabla 4

a. Forma la tabla de frecuencias.

b. Representa los datos con un diagrama de barras.

c. Representa los datos mediante una gráfica circular.

Razonamiento

13 Elabora un diagrama de barras que contenga la misma información que cada gráfica circular de la Figura 3, si se sabe que estas muestran el tiempo en minutos que tardan los estudiantes de los cursos 601, 602 y 603 de un colegio en llegar a clase.

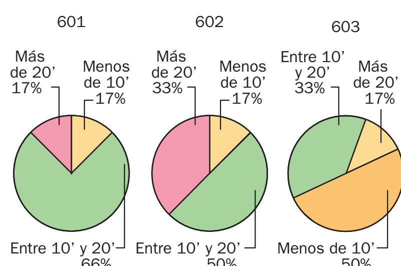


Figura 3

14 Observa la información que se muestra en el diagrama de la Figura 4, que corresponde al número de estudiantes asistentes a una práctica deportiva, y responde.



Figura 4

a. ¿Cuántos estudiantes asistieron durante la semana a la práctica?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes representa el día de mayor asistencia?

Comunicación

15 Observa la gráfica de la Figura 5, que muestra el resultado de un estudio sobre el sabor de gaseosa preferido por un grupo de estudiantes. Si solo cuatro personas prefieren el sabor a uva, ¿cuántas personas fueron encuestadas?

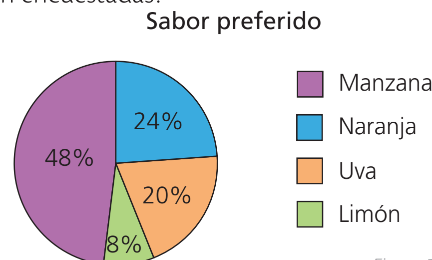


Figura 5

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

16 El Gobierno promovió una campaña de reducción del gasto de agua.

El diagrama de barras de la Figura 6 representa el agua ahorrada por las familias que formaron parte de la muestra utilizada para estudiar la bondad de esta medida.

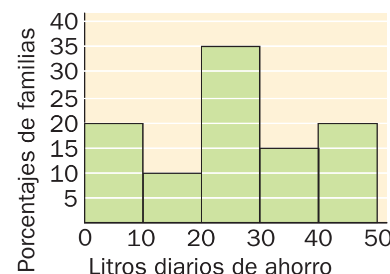


Figura 6

a. ¿Qué porcentaje de familias de la muestra ahorró entre 10 L y 30 L diarios?

b. Ocho familias de la muestra ahorraron menos de 10 L diarios. ¿Cuántas familias ahorraron entre 30 L y 40 L diarios?

17 En un supermercado se hizo un estudio sobre el tipo de refrescos vendidos en un día y se obtuvieron los datos de la Tabla 5.

Tipo	Botellas vendidas
De limón	150
De naranja	200
De cola	400
Otros	50

Tabla 5

Según la información, ¿cuál es el porcentaje de venta de cada sabor de refresco?

Practica Más

Población, muestra y variables

Comunicación

1. Determina la población, muestra y variable de cada situación estadística.

a. El colegio desea saber la estatura de las niñas de noveno grado. Se eligieron cinco niñas de cada curso.

b. Un canal de televisión desea saber la telenovela favorita de los ecuatorianos. Se realiza una encuesta a 150 personas.

c. Una empresa de aplicaciones para dispositivos móviles entrevista a 250 usuarios para saber la cantidad de aplicaciones gratuitas que han descargado.

d. El colegio realiza una encuesta a 250 estudiantes sobre su pasa tiempo favorito.

Recolección y conteo de datos

Ejercitación

2. Elige uno de los siguientes temas para elaborar y realizar una encuesta a 20 personas. Presenta los datos recolectados en una tabla.

a. Videojuegos

b. Programas infantiles

c. Equipo de fútbol

d. Instrumento musical

3. Realiza el conteo y completa la tabla de frecuencias

Medio de transporte	Conteo	Total
Carro	//////////	
Moto	///////////	
Bicicleta	////	
Bus	///////////////	
Taxi	/////	
Patines, patineta	///////	

Tabla 1

Frecuencias

Ejercitación

4. Utiliza la información de la Tabla 1 para responder las preguntas que se presentan a continuación.

a. ¿Cuál es el medio de transporte más utilizado?

b. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

c. ¿Cuántas personas utilizan un medio de transporte?

d. Halla el porcentaje de personas que se movilizan en cada vehículo motorizado.

Resolución de problemas

5. El gerente de una farmacia desea saber el comportamiento de las ventas durante una semana. Para esto, registró los datos en una tabla.

Día	Venta ($)
Lunes	350
Martes	720
Miércoles	650
Jueves	568
Viernes	980

Tabla 2

a. ¿Cuál fue la venta total de la semana?

b. ¿Qué día se registró la mayor venta?

c. ¿Cuál fue la venta durante los tres primeros días?

d. ¿Qué porcentaje de la venta de la semana se realizó el día viernes? ¿Y el miércoles?

Representación de información estadística

Comunicación

6. Utiliza el programa Excel para representar la información de los numerales 3 y 5. ¿Cuál representación es la más adecuada para cada caso?

Resolución de problemas

7. La fundación *Save the World* presentó un reporte sobre la cantidad de árboles talados entre los años 2010 y 2015.

Año	Cantidad
2010	12 500
2011	15 000
2012	17 500
2013	20 000
2014	27 500
2015	30 000

Tabla 3

a. Representa la información de la tabla en un diagrama circular y un diagrama de barras.

b. Identifica en cada diagrama el año en que se taló la mayor cantidad de árboles. Explica tu elección.

c. ¿Cuántos árboles se han talado durante estos años?

d. ¿Cuántos árboles fueron talados hasta el 2013?

e. Observa cada gráfica y elabora una conclusión de la información presentada.

Estrategia: Organizar la información en una tabla

Problema

Se realizó una encuesta a los 36 estudiantes de grado noveno sobre su comida preferida. Se encontró que ocho estudiantes prefieren la hamburguesa, diez la pizza, 15 el perro caliente y los demás los burritos. ¿Cuántos estudiantes prefieren los burritos?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información se obtuvo en la encuesta?
  R: La comida preferida de los estudiantes de grado noveno.
- ¿Qué cantidad hace falta para completar los datos?
  R: El número de estudiantes que prefieren los burritos.

2. Crea un plan

- Construye una tabla de frecuencias y encuentra la frecuencia de los burritos.

3. Ejecuta el plan

- Organiza los datos que da el problema en una tabla de frecuencias.

Comida preferida	Frecuencia
Hamburguesa	8
Pizza	10
Perro caliente	15
Burritos	
Total	36

Tabla 1

- Al total de estudiantes, réstale la suma de los datos conocidos; esta diferencia será la frecuencia que falta.

$$36 - (8 + 10 + 15) = 36 - 33 = 3$$

R: El número de estudiantes de grado sexto que prefieren los burritos es 3.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la suma de las frecuencias, incluida la de los burritos, sea 36.

Aplica la estrategia

1. Se les preguntó a 50 asistentes a un parque de diversiones sobre la atracción que más les gusta. Se obtuvo que 15 prefieren la montaña rusa, doce la rueda panorámica, nueve la casa del terror y los demás el simulador espacial. ¿Cuántos asistentes prefieren el simulador espacial?

   a. Comprende el problema
   ....
   ....

   b. Crea un plan
   ....
   ....

   c. Ejecuta el plan
   ....
   ....

   d. Comprueba la respuesta
   ....
   ....

Resuelve otros problemas

2. En una encuesta realizada a 400 personas sobre el tipo de transporte que utilizan para viajar se determinó que el 25% viaja en avión. Si el porcentaje de personas que viajan en carro corresponde a la mitad del porcentaje de las que viajan en avión, ¿cuántas personas viajan en carro?
3. Para determinar el color preferido de un grupo de 420 estudiantes, se preguntó a uno de cada seis su color preferido. ¿Consideras que se tomó una muestra representativa de estudiantes?
4. Al realizar una encuesta sobre el número de hijos de una familia de un barrio de la ciudad se encontró que el dato "3 hijos" tenía una frecuencia relativa de 0,4. Si en total se encuestaron 200 familias, ¿cuántas familias tienen tres hijos?

Formula problemas

5. Inventa y resuelve un problema que incluya esta información.

12	13	12	14	12	10	11	12	13	14
13	12	14	12	13	10	11	11	12	13
12	13	14	13	12	12	11	10	12	11

2 Las medidas estadísticas. Herramientas de cálculo

Explora

En una evaluación, Mario debía calcular la media y la desviación típica de los siguientes datos:

18	19	24	27	18	17	19	15	12
17	22	14	15	26	14	19	16	23

Figura 1

- Mario afirmó que la media es 18 y la desviación típica es 3,8. ¿Son correctas las soluciones que dio Mario? ¿De qué manera se pueden verificar rápidamente sus respuestas?

En la actualidad existen múltiples herramientas que permiten hacer cálculos de manera rápida y sencilla. En el cálculo de las medidas estadísticas, algunas herramientas útiles son: Excel y las calculadoras científicas.

2.1 Calcular en Excel

El **programa Excel** es una herramienta de cálculo. En él, la información se organiza en hojas distribuidas en celdas. Permite registrar y operar con: datos numéricos, datos de texto y fórmulas para hacer los cálculos.

Algunas fórmulas, como las que permiten calcular las medidas estadísticas, están predeterminadas en el programa. Estas fórmulas predeterminadas se llaman **funciones** y se ajustan a una **sintaxis** particular, es decir, a una escritura organizada y determinada.

Para verificar las respuestas que obtuvo Mario para los datos de la Figura 1, se calculan las medidas en Excel, como se muestra a continuación:

1. Se introducen los datos en la hoja de cálculo, como se muestra en la Figura 2.

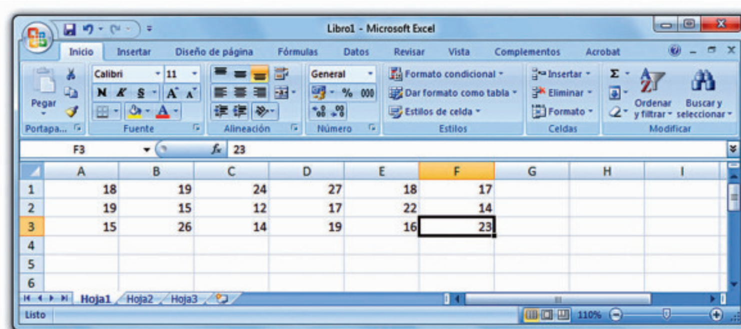


Figura 2

En este caso, el **rango** o conjunto de celdas en las que están los datos está ubicado entre las celdas A1 y F3 y se escribe así: (A1:F3).

2. Las medidas estadísticas que se desean calcular se escriben en columna y la función correspondiente se escribe en la celda de al lado, como en la Figura 3.



Figura 3

En este caso, se introdujeron las fórmulas o la sintaxis de diferentes funciones para calcular algunas medidas estadísticas: la media aritmética, la mediana, la moda, los cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3) y la desviación típica.

3. Después de escribir cada fórmula, se pulsa la tecla Enter y el programa hace el cálculo de la medida estadística, que aparecerá en la celda sustituyendo la función.

Ten en cuenta

- La sintaxis de una función en Excel se define así:

Signo igual — Fórmula — Rango

=moda(A1:H2)

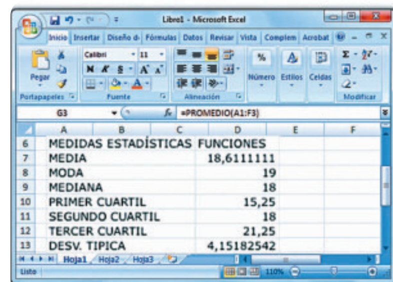
El rango corresponde a los datos numéricos o textuales que se necesitan para resolver una función.

Ten en cuenta

- La media aritmética o promedio de un conjunto de datos está comprendida entre el menor y el mayor de los datos del conjunto.
- La moda no necesariamente es única, como sí lo son la media y la mediana.
- Si en un estudio estadístico el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si en el estudio estadístico el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y medidas de dispersión de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Los resultados que arroja el programa se muestran en la Figura 4. Según esta información, se puede afirmar que Mario se equivocó en sus respuestas.



	A	B	C	D
6	MEDIDAS ESTADÍSTICAS		FUNCIONES	
7	MEDIA			18,6111111
8	MODA			19
9	MEDIANA			18
10	PRIMER CUARTIL			15,25
11	SEGUNDO CUARTIL			18
12	TERCER CUARTIL			21,25
13	DESV. TIPICA			4,15182542

Figura 4

Ten en cuenta

Algunas funciones se obtienen pulsando primero la tecla SHIFT y a continuación la tecla correspondiente. Se debe tener en cuenta que algunas calculadoras funcionan de manera diferente a la que aquí se expone.

2.2 Calcular la media y la desviación típica en la calculadora

La **calculadora científica** permite el cálculo de medidas estadísticas.



Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula la media aritmética y la desviación típica de los datos 8, 3, 7, 5, 9 y 9:

Solución:

1. Se deja la calculadora en modo estadístico: se pulsa MENU y se selecciona *SD*.
2. Se introducen los datos y a después de cada uno se pulsa *DATA* (o +):

   8 *DATA* 3 *DATA* 7 *DATA* 5 *DATA* 9 *DATA* 9 *DATA*

3. Si un valor se repite, se simplifica digitando el dato, el signo x y la frecuencia absoluta respectiva. Luego se pulsa *DATA*. Así, 9 x 2 *DATA*.
4. Para obtener la media aritmética, se pulsa la tecla ALPHA y 4. Así, $\overline{x} = 6{,}4$.
5. Para saber la desviación típica, se presionan ALPHA y 6. Entonces, $s = 2{,}1540$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 A continuación se presentan las edades de los jugadores de dos equipos de fútbol.

Equipo A							
19	24	27	33	19	24	23	31
28	24	27	33	30	28	20	22
27	21	26	26	18	24	28	0

Tabla 1

Equipo B							
24	26	21	18	24	27	28	19
24	32	19	24	26	23	24	18
21	23	23	31	28	20	22	0

Tabla 2

a. Calcula en Excel la media de las edades de cada equipo, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b. ¿En cuál equipo las edades están más agrupadas alrededor de la media?

3 Con la calculadora obtén la media y la desviación típica del siguiente conjunto de datos:

1 3 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8

Resolución de problemas 

4 Este es el número de faltas cometidas por partido, por dos defensas centrales, a lo largo de 18 jornadas.

Jugador A	6	8	12	6	5	3	9	5	7
	3	7	8	11	5	7	8	9	7

Tabla 3

Jugador B	12	15	13	3	13	6	14	16	6
	8	11	8	5	7	10	12	8	16

Tabla 4

a. ¿Cuál es la media y la desviación típica de los datos? ¿Qué herramienta utilizaste para hacer el cálculo?

b. Según las medidas que hallaste, ¿cuál consideras que es el jugador más regular?

3 Experimentos y sucesos aleatorios. Espacios muestrales

Explora

Uno de los juegos de dados más populares es el *craps*. Sus reglas son:

- El jugador lanza dos dados simultáneamente para observar la suma de las caras.
- Si la suma es 7 u 11, el jugador gana.
- Si la suma es 2, 3 o 12 , pierde.
- Si la suma es una cantidad diferente, el jugador repite el lanzamiento.

- ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente para este experimento?

Al lanzar dos datos al aire, no es posible predecir el resultado que se obtendrá. Este tipo de experiencias se denominan experimentos aleatorios y todos los resultados posibles forman el **espacio muestral.**

Para el caso del juego de *craps* hay 36 resultados posibles y el espacio muestral correspondiente es:

$$E = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

Además, cada subconjunto de un espacio muestral se denomina **suceso**. Un suceso relacionado con el espacio muestral del juego puede ser: A = "Sacar números iguales". En este caso, los resultados serían:

$$A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$$

Ten en cuenta

- El estudio de la probabilidad tuvo su origen en los juegos de azar.
- Pierre Fermat inició el estudio de la probabilidad en el siglo XVII.



Pierre Fermat

3.1 Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es un experimento que puede repetirse varias veces. Es posible conocer todos los resultados que se pueden obtener, pero aún así no es posible determinar cuál de ellos saldrá cada vez que se lleva a cabo.

Ejemplo 1

Para elegir al ganador de un sorteo, se utiliza una ruleta que tiene diez compartimentos numerados del 0 al 9. (Figura 1)

a. ¿Se puede predecir el resultado que se va a obtener al hacer girar la ruleta?

b. ¿Cuáles son todos los resultados que se pueden obtener?



Figura 1

a. Aunque se repita muchas veces la experiencia, jamás se podrá predecir el resultado; es un experimento aleatorio.

b. Los resultados posibles son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Ejemplo 2

Se lanzan al aire dos monedas simultáneamente.

a. ¿Se puede predecir el resultado que se va a obtener al hacer cada lanzamiento?

b. ¿Qué resultados se pueden obtener?

a. Como se trata de un experimento aleatorio, no es posible determinar cuál es el resultado que se obtendrá en cada caso.

b. Los resultados que se pueden obtener son:

(cara, cara) (cara, sello)

(sello, cara) (sello, sello)



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt15

Allí encontrarás explicaciones y ejemplos de los experimentos aleatorios.

Destreza con criterios de desempeño: Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

3.2 Espacio muestral

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio.

Ejemplo 3

Para la información del Ejemplo 1, el espacio muestral E está conformado por todos los resultados posibles, es decir:

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Ejemplo 4

Se lanza un dado, cuyas seis caras se distribuyen así: dos caras de color azul, dos caras de color rojo y dos caras de color verde. Se espera que caiga sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.

El espacio muestral E de este experimento es:

$$E = \{ \text{azul, azul, rojo, rojo, verde, verde} \}$$

3.3 Evento o suceso aleatorio

Un evento o suceso aleatorio **elemental** es cada uno de los resultados posibles que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Un **suceso compuesto** corresponde a cualquier suceso que esté formado por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo 5

Se realiza el experimento de lanzar un dado.

a. ¿Cuáles son los sucesos elementales?

b. ¿Cuál es el espacio muestral?

c. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos?



a. Hay seis sucesos elementales, que son: sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

b. El espacio muestral es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c. Son sucesos compuestos sacar un número par, cuyos resultados pueden ser "2, 4 o 6", y sacar un múltiplo de 3, que tendría como resultados posibles "3 o 6".

Ejemplo 6

Se realiza el experimento de lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4. Se anota el resultado de la cara oculta.

a. ¿Cuáles son los sucesos elementales?

b. ¿Cuál es el espacio muestral?

c. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos?

a. Hay cuatro sucesos elementales, que son: sacar 1, 2, 3 o 4.

b. El espacio muestral es el conjunto {1, 2, 3, 4}

c. Son sucesos compuestos: sacar un número menor que 3, cuyos resultados pueden ser "1 o 2", y sacar un número impar.

Ten en cuenta

Algunos datos curiosos relacionados con el cálculo de espacios muestrales en el lanzamiento de una moneda son:

- El naturalista francés Count Buffon (1707-1788) lanzó una moneda 4 040 veces y obuvo un espacio muestral de 2 048 caras y 1 992 sellos.
- El matemático australiano John Kerrich (1903-1985) lanzó una moneda 10 000 veces. El resultado que obtuvo fue 5 067 caras y 4 933 sellos.
- El científico, matemático y pensador británico Karl Pearson (1827-1936) lanzó una moneda 24 000 veces y obtuvo 12 012 caras y 11 988 sellos.

Ten en cuenta

La baraja española consiste en un mazo de 48 naipes o "cartas"
Tradicionalmente se divide en cuatro familias, también llamadas palos, cada uno numerado del 1 al 12, que son: oros, copas, espadas y bastos.

Las figuras corresponden a los números 10 "sota", 11 "caballo" y 12 "rey", respectivamente. Para ciertos juegos se dividen en palos cortos (oros y copas) y largos (bastos y espadas).

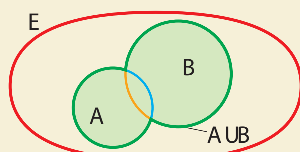
Históricamente se fabricaron versiones donde los mazos no traían los números 8 y 9, por lo que solamente proveían 40 naipes, esto no era infrecuente debido a que existían juegos muy populares que no los usaban. Actualmente ciertos mazos incluyen además 2 comodines, por ello pueden ser de 40, 48 o de 50 naipes dependiendo del juego.

3 Experimentos y eventos aleatorios. Espacios muestrales

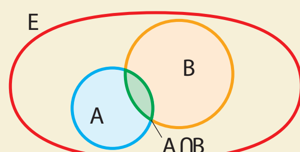
Ten en cuenta

- Los diagramas de Venn representan los sucesos y sus operaciones.

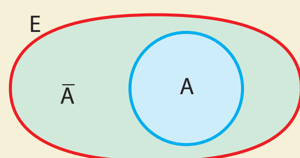
Unión de sucesos



Intersección de sucesos



Sucesos contrarios



3.4 Operaciones con eventos o sucesos

Al igual que con los conjuntos, con los sucesos aleatorios también es posible realizar las operaciones de unión e intersección.

Unión de sucesos. El suceso $A \cup B$ se da cuando se realiza A o se realiza B.

Intersección de sucesos. El suceso $A \cap B$ se da cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B.

Sucesos incompatibles. Dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden realizarse simultáneamente, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 7

Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay 20, numeradas del 1 a 20. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Extraer un número primo". B: "Extraer un número par".
C: "Extraer un múltiplo de 5". D: "Extraer un divisor de 18".

a. Escribe en palabras y determina los siguientes sucesos:
$A \cup B$, $A \cap B$, $C \cap D$, $C - A$

b. Determina dos sucesos incompatibles.

a. $A \cup B$: "Extraer un número primo o un número par".
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$
$A \cap B$: "Extraer un número primo y número par".
Entonces, $A \cap B = \{2\}$
$C \cap D$: "Extraer un múltiplo de 5 y divisor de 18".
Así, $C \cap D = \varnothing$
$C - A$: "Extraer un múltiplo de 5 que no sea primo".
$C - A = \{10, 15, 20\}$

b. C y D son sucesos incompatibles, porque $C \cap D = \varnothing$.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Se lanza una moneda y se consideran los siguientes sucesos:
A: "Salir cara".
B: "Salir sello".

a. ¿$A \cup B$ es el espacio muestral?

b. Determina $A - B$

c. ¿Son compatibles los sucesos A y B?

Solución:

a. $A \cup B$ es el espacio muestral, ya que $A \cup B = \{\text{cara, sello}\}$.

b. $A - B = \{\text{cara}\}$

c. A y B son sucesos compatibles, porque $A \cap B = \varnothing$.

CULTURA del Buen Vivir

La perseverancia

La perseverancia se construye día a día con la práctica de una rutina en la que te comprometas con dedicación y un firme propósito de cumplir tus metas.

- ¿Consideras que la formación en matemáticas te ayuda a ser más perseverante? Explica.

Destreza con criterios de desempeño: Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.

a. Extraer, sin mirar, una carta de una baraja española.

b. Lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras tienen las letras A, B, C, D, y anotar el resultado de la cara oculta.

c. Medir la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 cm de lado.

d. Anotar el número de personas que se suben a un bus en uno de los paraderos.

e. Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo e isósceles.

f. Calcular la raíz cuadrada de un número

g. Lanzar un dado que tiene sus caras marcadas así: tres caras con una O, tres caras con una X. Al caer, anotar el resultado que queda en la cara superior.

3 Considera el experimento aleatorio de sacar una bola de una urna en donde hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Determina lo siguiente:

a. El espacio muestral.

b. El suceso B: "Sacar un número mayor que 3".

c. El suceso contrario de B.

4 Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.



a. Sacar un múltiplo de 3.

b. Sacar un número menor que 4.

c. Sacar 0.

d. Sacar un número primo mayor que 3.

e. Sacar un número menor que 7.

f. Sacar un número diferente de 6.

5 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los siguientes sucesos:

A: "Sacar una copa".

B: "Sacar un rey".

C: "Sacar una carta menor que 5".

Determina estos sucesos:

a. $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$

b. $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$

c. $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

Comunicación

6 Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el número de la cara superior. Considera estos sucesos:

$$A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 5, 6\} \text{ y } C = \{3\}$$

a. Halla los sucesos: $A \cup B$ $\quad A \cap B$ $\quad B \cup C$ $\quad B \cap C$

b. Representa los sucesos del literal anterior utilizando diagramas de Venn.

7 Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay diez bolas: cinco son rojas, tres son blancas y dos son azules. Se consideran los sucesos:

A: "Extraer una bola roja".

B: "Extraer una bola blanca".

C: "Extraer una bola azul".

a. Describe en palabras y determina estos sucesos:

$A \cup B$ $\quad C \cup A$ $\quad A \cap B$ $\quad C - A$

b. Determina dos sucesos incompatibles.

Razonamiento

8 Dos sucesos contrarios, ¿son incompatibles? Dos sucesos incompatibles, ¿son contrarios? Explica tus respuestas.

9 El suceso de intersección de dos sucesos contrarios, ¿es el suceso imposible?

10 En un experimento para dos sucesos *A* y *B*, se cumple que $A \cup B = A$. ¿Es cierto que $B = B$? Justifica tu respuesta utilizando un ejemplo.

Resolución de problemas

11 Para determinar los ganadores de una rifa se utiliza una urna como la de la figura 1.

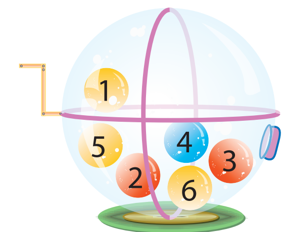


Figura 1

Si se elige una bola al azar:

a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

b. ¿Cuáles son los elementos del siguiente evento?

A = { números pares}

c. Determina los elementos del siguiente evento:

B = { números impares menores que 5}

d. ¿El conjunto $A \cup B$ es igual al espacio muestral?

4 Técnicas de conteo. Diagrama de árbol

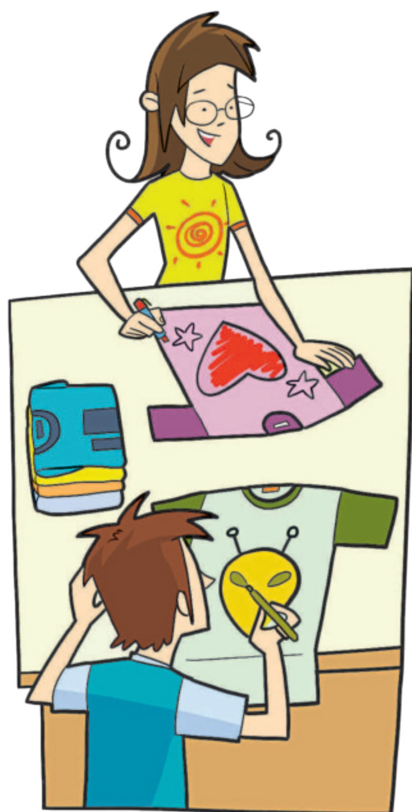
Explora

Unos estudiantes diseñan camisetas para un evento. En su diseño tienen en cuenta tres criterios tal como se muestra en la Figura 1

Talla	Motivos	Colores
S M L XL	Serio Divertido	Rojo Verde

Tabla 1

- ¿Cuántos modelos diferentes crean los estudiantes?



Para responder, es necesario efectuar el conteo de las posibles combinaciones de los tres criterios que se tienen en cuenta al elaborar cada camiseta.
Dos posibles combinaciones son:

- Camisa talla S, motivo serio y de color rojo.
- Camisa talla S, motivo divertido y color verde.

Sin embargo, hacer esta enumeración no es sencilla debido a que hay varias posibilidades de combinación. Para garantizar que se tengan en cuenta todas las combinaciones y que no se repitan, se puede utilizar un diagrama de árbol.

El **diagrama de árbol** es una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento que consta de dos o más pasos.

El diagrama de árbol correspondiente a los diseños de las camisetas es este:

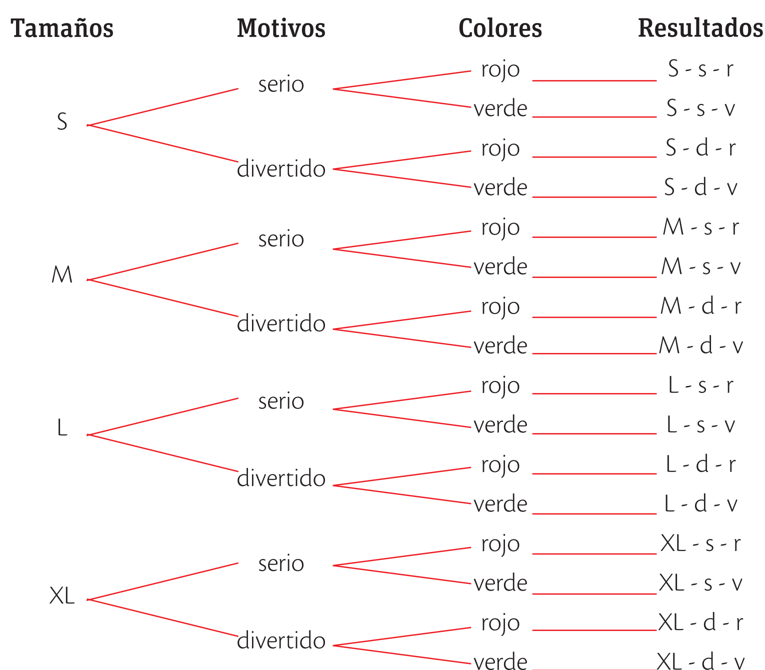


Figura 1

Para **calcular el número de combinaciones posibles,** se debe tener en cuenta que si un primer experimento tiene p resultados distintos y un segundo experimento tiene q resultados distintos, entonces el número de resultados distintos para los dos experimentos es $p \cdot q$. Por lo tanto, el caso de las camisetas se calcula así:

4 tamaños posibles × 2 motivos posibles × 2 colores posibles = 16

Por lo tanto, los estudiantes deben diseñar 16 modelos diferentes de camisetas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 ¿Cuántos resultados diferentes se obtendrán cuando se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6?

Solución:

Como para cada dado hay seis posibles valores, el espacio muestral tendrá:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216 \text{ resultados posibles}$$

Destreza con criterios de desempeño: Determinar una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Para cada experimento halla el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama de árbol. Especifica el número de resultados posibles.

a. Se lanzan tres monedas.

b. Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas así:
- Primer dado: 1, 1, 1, 2, 3, 4.
- Segundo dado: 2, 3, 4, 4, 5, 6.

c. Se lanzan una moneda y un dado cúbico.

d. Se extrae una carta de una baraja española y se lanzan un dado tetraédrico y una moneda.

e. Sacar dos bolas de dos urnas diferentes. En la primera urna hay tres bolas marcadas con las letras A, N y P y en la segunta hay dos bolas marcadas con los números 1 y 3.

f. Se lanzan sucesivamente una moneda y un dado octaédrico regular.

Razonamiento

3 Sonia tiene dos pantalones deportivos, cuatro camisetas y tres pares de zapatillas.



a. Representa las distintas opciones de vestir que tiene Sonia para hacer ejercicio.

b. Compara tu respuesta con las de dos de tus compañeros y escriban una conclusión.

4 Con las letras de la palabra AMOR forma todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no sentido, sin repetir ninguna.

a. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?

b. Si se tienen en cuenta solamente las palabras que tienen sentido, ¿cuántos resultados hay?

5 Escribe todos los números de dos cifras que se pueden formar utilizando los dígitos de cada conjunto. Explica la estrategia de conteo que utilices.

a. $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b. $B = \{1, 4, 3, 2, 9, 5\}$

Modelación

6 Propón un ejemplo de un experimento aleatorio que tenga 36 resultados diferentes.

7 Formula una situación que se pueda representar a partir del diagrama del siguiente diagrama de árbol.

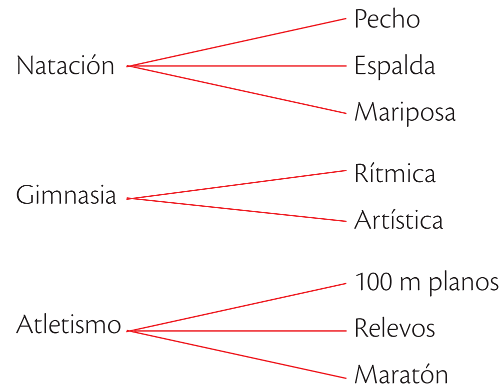


Figura 2

Resolución de problemas

8 El equipo de baloncesto de grado noveno desea elaborar una bandera con dos franjas horizontales de diferente color. Los colores que han preseleccionado son azul, amarillo, blanco y verde. ¿Cuántas opciones de color tienen para diseñar la bandera?

9 Juan pide una café caliente y le ofrecen una bebida que cumpla con alguno de estos criterios:

Tipo de bebida	Tipo de café utilizado	Cantidad de azúcar
expreso capuchino filtrado	normal descafeinado	dulce semidulce amargo

tabla2

a. ¿Entre cuántos tipos de café puede elegir Juan?

b. Si aumenta un complemento, como crema de leche o arequipe, ¿entre cuántos puede elegir?

10 Utiliza el diagrama de árbol de la Figura 3 para plantear y resolver un problema sobre probabilidad.

Primer Hijo Segundo hijo

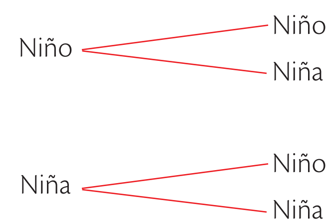


Figura 3

5 Probabilidad de eventos o sucesos . Regla de Laplace

Explora

Se lanza diez veces un dado cúbico y se obtienen los siguientes resultados.

2	3	4	5	6
1	1	3	3	6

- ¿Cuántos de los lanzamientos llevaron a obtener un número impar?
- ¿Si se hacen veinte lanzamientos, la cantidad de números impares se aproximará a la que se obtuvo los primeros diez lanzamientos?

Ten en cuenta



- Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático y astrónomo francés, fue el primero en dar una definición de la probabilidad de un suceso.
- De origen humilde, ocupó importantes cargos políticos en la época de Napoleón. En 1817, Luis XVIII le otorgó el título de Marqués de Laplace.

En diez lanzamientos, la frecuencia para cada resultado fue:

Número obtenido	1	3	5	2	4	6
Frecuencia	2	3	1	1	1	2

Tabla 1

Se obtuvieron seis de diez resultados para la opción "sacar número impar" y cuatro de diez para la opción "sacar número par".

Luego, la probabilidad de sacar un tipo de número u otro es aproximadamente igual debido a que se trata de eventos equiprobables. Esta característica puede seguir comprobándose a medida que aumenta el número de lanzamientos.

En un experimento, la **frecuencia relativa** de un suceso y su **probabilidad** tienden a aproximarse a medida que crece el número de pruebas realizadas.

Ejemplo 1

Se lanza una moneda 200 veces y se anotan las frecuencias absolutas y relativas del suceso: "salir cara". La tabla 2 y la figura 1, muestran los resultados obtenidos.

Número de tiros	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
20	11	0,550
40	18	0,450
60	31	0,517
80	42	0,525
100	48	0,480
120	59	0,492
140	72	0,514
160	83	0,519
180	92	0,511
200	101	0,505

Tabla 2

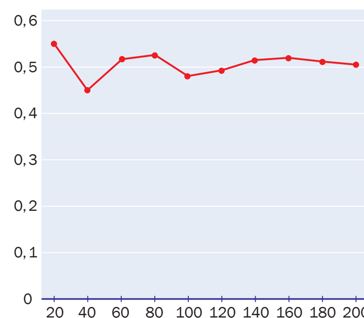


Figura 1

Se puede observar que la frecuencia relativa del suceso *A* tiende a estabilizarse en torno al número 0,5; este valor corresponde a la probabilidad del suceso *A*.

5.1 Regla de Laplace

Es importante saber que la regla de Laplace se aplica solo en aquellos experimentos en los que todos los resultados son igualmente probables (equiprobables). Además, en un espacio muestral cuyos resultados son equiprobables, se tiene que:

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}}$$

Los **casos favorables** son las posibilidades de obtener un resultado específico y los **casos posibles** son todos los resultados del espacio muestral del experimento.

Ejemplo 2

Para sortear un viaje, una agencia asignó un número del 1 al 600 a cada cliente. Como Luz viaja con sus papás, les correspondieron tres números. ¿Cuál es la probabilidad de que el viaje se lo gane la familia de Luz?

Como tienen tres posibilidades entre 600 de ganarse el premio, la probabilidad de que gane la familia de Luz es $\frac{3}{600}$.

Destreza con criterios de desempeño: Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

5.2 Propiedades de la probabilidad

A partir de la aplicación de la regla de Laplace, se pueden identificar diferentes propiedades de la probabilidad de un suceso.

La **probabilidad de un suceso** es un número comprendido entre 0 y 1.
Algunos axiomas relacionados son:
La probabilidad del **suceso seguro** es 1.
La probabilidad del **suceso imposible** es 0.
La probabilidad del **suceso contrario** de A es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio de una rifa si, de los 100 boletos vendidos, se compran 0, 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100?

Si se compran cinco boletos, la probabilidad de ganar el premio será $\frac{5}{100} = 0{,}05$.

Las demás probabilidades son:

$\frac{0}{100} = 0$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{2}{100} = 0{,}02$; ...; $\frac{100}{100} = 1$

Por lo tanto, el menor valor posible de la probabilidad será 0 y el mayor será 1.

Ejemplo 4

Se extrae una bola de la urna de la figura 2 Halla las siguientes probabilidades.

a. Sacar roja. **b.** Sacar verde.

a. $P(R) = \frac{5}{5} = 1$ **b.** $P(V) = \frac{0}{5} = 0$

Aquí es seguro que se va a sacar una bola roja y es imposible sacar una verde.

Ejemplo 5

En una caja hay 24 semillas, de las cuales diez son almendras y el resto, avellanas. Si se escoge una semilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una almendra y cuál es la probabilidad de que sea una avellana?

A: "Sacar una semilla de almendra". $P(A) = \frac{10}{24}$

$\overline{A}$: "Sacar una semilla de avellana". $P(\overline{A}) = \frac{14}{24}$

Observa que $P(A) + P(\overline{A}) = \frac{10}{24} + \frac{14}{24}$ 5 + $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 En una urna hay seis bolas rojas y tres verdes. Calcula las siguientes probabilidades, si se extrae una bola al azar.

a. Sacar roja. **b.** No sacar roja.
c. Sacar verde. **d.** No sacar verde.

Solución:

La probabilidad de cada suceso es:

a. $P(R) = \frac{6}{9}$. **b.** $P(R) = 1 - \frac{6}{9} = \frac{3}{9}$

c. $P(V)$: $\frac{3}{9}$ **d.** $P(V) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$



TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt16

Explora ejemplos y algunos ejercicios propuestos para practicar las propiedades de la probabilidad.

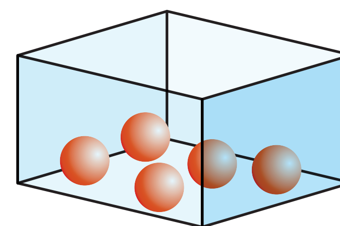


Figura 2

App

Probabilidad de sucesos

Abre la aplicación *Randomizer* y realiza un análisis estadístico de 20 resultados aleatorios dados por la aplicación.

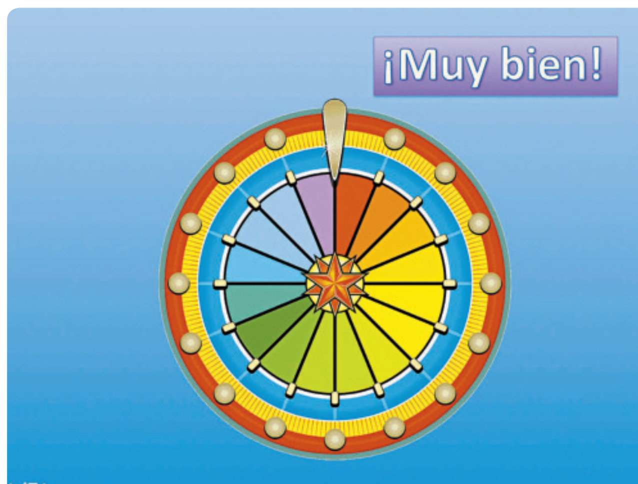


5 Probabilidad de eventos o sucesos. Regla de Laplace

MatemaTICS

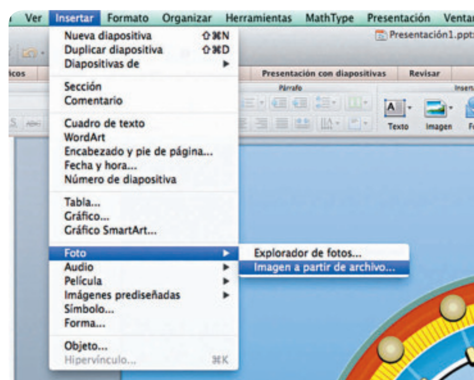
Crea tu propia ruleta con PowerPoint

PowerPoint es un programa que permite la creación de diapositivas en las que se pueden incorporar textos, fotos, ilustraciones, dibujos, tablas, etc., así como crear animaciones sencillas como la que se muestra a continuación.



- Busca la imagen de una ruleta llamativa y con varias divisiones de colores.

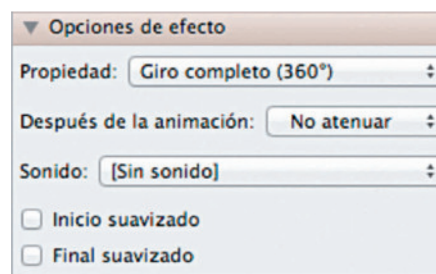
- Inserta la imagen en el programa PowerPoint. Da clic en la pestaña *Insertar*, luego en *Foto* y finalmente en la opción *Imagen desde archivo*. Entonces, selecciona la imagen que preparaste anteriormente.



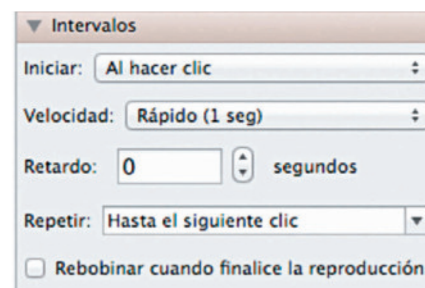
- Ve a la pestaña de *Animaciones* y busca la animación *Girar*.



- En la pestaña de *Animaciones* busca *Panel de animación* y allí, *Opciones de efectos*.



- En la pestaña de *Animaciones* busca el *Panel de animación* y allí, *Intervalos*.



- Crea un texto en WordArt y anímalo con la acción *Aparecer*. Luego, ubica una flecha fija y el texto en la diapositiva. Este aparecerá cuando detengas la ruleta en medio de la presentación, al hacer clic.

¡Aprovecha tu ruleta para repasar los temas de probabilidad que has estudiado!

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 En cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, señala si los sucesos elementales que forman el espacio muestral son o no equiprobables.

a. Al lanzar un dado, que salga un número par o impar.

b. Obtener una nota de 0 a 10 en un examen que se respondió al azar.

c. Las posibles sumas de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

3 Completa la Tabla 3. Considera que el experimento consiste en sacar una bola de la urna de la Figura 3.

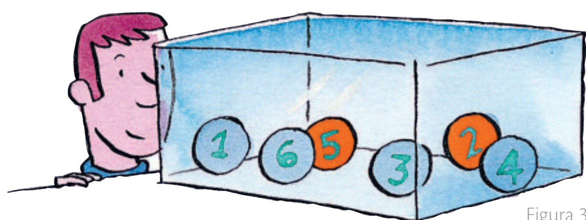


Figura 3

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sacar azul		
Sacar par		
Sacar anaranjada o impar		
Sacar anaranjada		

Tabla 3

4 En una urna hay 30 bolas numeradas del 1 al 30. Se extrae una bola al azar. Calcula estas probabilidades.

a. Sacar un número par.

b. Sacar un número que termina en 0.

c. Sacar un múltiplo de 5.

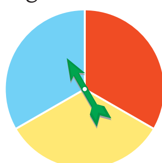
d. Sacar un número que no sea un múltiplo de 3.

5 Calcula la probabilidad de que al hacer girar la ruleta de la figura 4 se detenga en uno de estos colores.

a. Rojo

b. Amarillo

c. Azul o rojo


Figura 4

6 De una baraja de póquer (52 cartas) se extrae una carta al azar. Determina la probabilidad de sacar una que:

a. Sea un trébol. **b.** No sea un trébol.

c. Sea una jota. **d.** No sea una jota.

7 . Considera los números de tres cifras. Explica cuál es la probabilidad de que, si se elige uno de estos números al azar, sus tres dígitos sean distintos.

Razonamiento

8 Se escriben todas las letras de la palabra "murciélago" en tarjetas y estas son introducidas en una urna. Luego se extrae una tarjeta al azar. Halla la probabilidad de:

a. Extraer una tarjeta que tiene una vocal.

b. Extraer una tarjeta que tiene una consonante.

c. Extraer una tarjeta que tiene la vocal a.

9 Determina si las afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V) a partir de los resultados de la actividad anterior.

a. La cantidad de eventos favorables para el evento "vocal a" es 1. ( )

b. La probabilidad de sacar una vocal es igual a la de sacar una consonante. ( )

c. La probabilidad de sacar una vocal es 0,1. ( )

d. Es imposible obtener una letra b. ( )

e. Es seguro obtener una consonante. ( )

10 Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea alguna de las siguientes opciones.

a. El número 7.

b. Un múltiplo de 3.

c. Igual al último número de tu teléfono fijo.

Modelación

11 Propón un ejemplo de un experimento y un suceso relacionado cuya probabilidad sea alguna de estas opciones.

a. Imposible **b.** Posible **c.** Segura

Resolución de problemas



12 En una clase hay 16 niñas y 14 niños. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta. Luego, se introducen las tarjetas en una caja. Contesta las preguntas, considerando que se extrae una de las 30 tarjetas al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de un niño?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de una niña?

13 El equipo de baloncesto de grado noveno desea elaborar una bandera con dos franjas horizontales de diferente color. Los colores que más les gustan son azul, amarillo, blanco y verde.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que elijan el color azul?

b. Escribe un evento imposible para este experimento.

Practica Más

Medidas de posición central

Ejercitación

1. El reporte muestra la cantidad de unidades diarias de celulares que se vendieron durante un mes en un almacén.

5	7	5	4	7	9
4	3	1	5	7	5
3	2	1	4	7	8
7	6	5	5	4	2
5	3	6	8	9	1

A partir de la información, calcula:

a. El promedio de las ventas.

b. La moda de las ventas.

c. La mediana de las ventas.

Medidas de posición no central

2. Un centro de diagnóstico automotor registró la cantidad de kilómetros recorridos de los autos que repararon en un mes.

Kilómetros recorridos	Frecuencia
[0 , 5 000]	75
[5 000, 10 000]	44
[10 000, 15 000]	86
[150 00, 20 000]	52
[20 000, 25 000]	91
[25 000, 30 000]	64
[30 000, 35 000]	52
[35 000, 40 000]	31

Tabla 1

a. Calcula la media, mediana y moda de los datos.

b. Halla los cuartiles.

Medidas de dispersión

Razonamiento

3. Calcula el rango, la desviación media, la variación y la desviación típica del siguiente conjunto de datos.

Ventas de carros en un concesionario	
Número de productos	Frecuencia
[0 , 16]	7
[16, 32]	15
[32, 48]	12
[48, 64]	17
[64, 80]	19
[80, 96]	24

Tabla 2

Experimentos y sucesos aleatorios

Comunicación

4. Determina el espacio muestral de cada experimento.

a. Se lanza un dado octaédrico regular con caras numeradas del 1 al 8.

b. Se lanza dos dados tetraédricos numerados 1 al 4 y se anota la suma de los números obtenidos.

c. Se escogen tres cartas de tres colores distintos de cuatro posibles.

Resolución de problemas

5. Un experimento consiste en introducir seis balotas rojas numeradas del 1 al 6 y seis balotas azules numeradas del 7 al 12. Al sacar las balotas, se consideran los sucesos:

A: Extraer una balota azul.

B: Extraer una balota roja.

C: Extraer una balota número par.

D: Extraer una balota número impar.

a. Describe $A \cup B$, $A \cap B$; $B \cup C$ y $A \cap C$.

b. ¿Existen sucesos incompatibles? Explica.

Diagrama de árbol

Comunicación

6. Determina el espacio muestral de cada suceso.

a. Se lanza un dado octaédrico numerado del 1 al 8 y uno tetraédrico numerado del 1 al 4, y se anota la suma de los números obtenidos.

b. Se tienen cinco tarjetas marcadas con las letras A, B, C y los números 1 y 2, respectivamente. Se sacan al azar dos tarjetas con letra y una con número.

Probabilidad de sucesos

Comunicación

7. Propón un experimento que cumpla cada condición.

a. De probabilidad 1.

b. De probabilidad 0.

c. De probabilidad $\frac{1}{2}$.

d. De probabilidad $\frac{7}{8}$.

8. Halla las siguientes probabilidades cuando se lanza un dado tetraédrico y un dado hexaédrico.

a. La suma sea un número par.

b. La suma sea un número impar.

c. La suma sea un número primo.

Resolución de Problemas

Estrategia: Dividir el problema en partes

Problema

Se lanzan dos dados simultáneamente,



¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados en sus caras superiores sea múltiplo de 3?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?
  R: Dos dados son lanzados al mismo tiempo.
- ¿Qué debes calcular?
  R: La probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados, sea un múltiplo de 3.

2. Crea un plan

- Encuentra el espacio muestral del experimento y busca las parejas de números que cumplen la condición establecida. Después, calcula la probabilidad de este evento.

3. Ejecuta el plan

- Al lanzar un solo dado, el espacio muestral es:
  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Si se tiene en cuenta que en el experimento, se lanzan dos dados simultáneamente, e el espacio muestral corresponderá a las parejas ordenadas::
  $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$ $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$ $(,3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$ $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$ $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$ $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$
- Luego, se seleccionan las parejas ordenadas cuya suma es un múltiplo de 3. Estas son:
  $M = \{(1,2), (2,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (6,6)\}$.

R: La probabilidad es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la probabilidad de obtener un múltiplo de cinco es $\frac{7}{36}$.

Aplica la estrategia

1. Dos estudiantes participan en un experimento aleatorio en el que lanzan simultáneamente un dado y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan (6, s)?
   a. Comprende el problema
   ....
   ....
   b. Crea un plan
   ....
   ....
   c. Ejecuta el plan
   ....
   ....
   d. Comprueba la respuesta
   ....
   ....

Resuelve otros problemas

2. Un estudiante está preocupado porque obtuvo como calificaciones en matemáticas las notas: 65, 75, 60, y 90. ¿Cuál debe ser la quinta nota para que alcance un promedio de 75?

3. En la tabla se muestran las calificaciones de dos estudiantes en el área de Castellano. Según esta información, ¿cuál de ellos obtuvo el mejor promedio?

Roberto	60	80	90	50	95
Martina	50	80	95	50	100

Tabla 1

4. En un experimento, se lanza un dado hexaédrico y consecutivamente se lanza otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer dado y en el segundo salga simultáneamente el número 6?

Formula problemas

5. Invente una situación problema que involucre la siguiente información y resuélvela.

“En un curso de 36 estudiantes el número de mujeres es el doble que el número de hombres”.”

6 Probabilidad de la unión de eventos o sucesos

Explora

Isabela introdujo algunas bolas de colores en una urna.

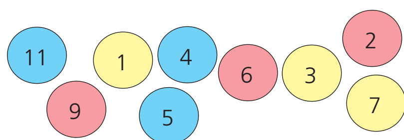


Figura 1

Ella saca una de las bolas al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que saque una bola amarilla o un número par?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola roja o un número par?

Para los experimentos propuestos se tienen en cuenta los siguientes sucesos:

A: "sacar bola amarilla" B: "sacar un número par"
C: "sacar bola roja" D: "sacar un número par"

Al analizar las bolas amarillas, identificamos que ninguna tiene número par. Luego, los sucesos A y B no pueden suceder simultáneamente. Al revisar las bolas rojas, vemos que dos de ellas tienen número par. Luego, los sucesos C y D pueden ocurrir conjuntamente. Estas condiciones varían la probabilidad de la unión de los sucesos.

La **unión de dos eventos** A y B, que pertenecen al mismo experimento, es otro suceso que incluye los resultados de los eventos A o B y se determina $A \cup B$. Luego:
- Si A y B son sucesos **incompatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A y B son sucesos **complatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Entonces, en los experimentos propuestos se obtiene lo siguiente.

Evento: sacar bola amarilla o número par	**Evento:** sacar bola roja o número par
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $= \frac{3}{9} + \frac{3}{9}$ $= \frac{6}{9}$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= \frac{3}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9}$ $= \frac{4}{9}$

Tabla 1

Ejemplo 1

Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Se consideran los sucesos A: "salir impar" y B: "salir múltiplo de 4".

Al hallar el suceso $A \cup B$ y su probabilidad se tiene que $A \cup B$: "salir impar o múltiplo de 4" $= \{1, 3, 4, 5\}$ $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$.

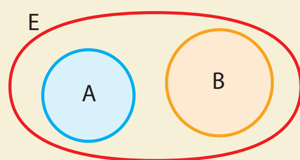
Además, al calcular $P(A) = \frac{3}{6}$ y $P(B) = \frac{1}{6}$ se verifica que:

$\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ y, por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Luego, A y B son incompatibles.

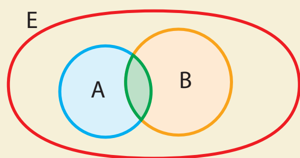
Ten en cuenta

- Probabilidad sucesos incompatibles



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Probabilidad sucesos compatibles



$P(A \cup B) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Se lanza un dado cúbico. Una de sus caras no está marcada y las otras caras están marcadas así: 1, 1, 2, 3, 4. Se consideran los siguientes sucesos.

A**:** "salir número primo" B: "salir número par"

a. ¿Cuál es el suceso $A \cup B$ y su probabilidad?

b. ¿Los sucesos A y B son compatibles? Verifícalo.

Solución:

a. $P(A) = \frac{2}{6}$ y $P(B) = \frac{2}{6}$ $\rightarrow A \cup B = \{2, 3, 4\}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{6}$

$A \cap B = \{2\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

b. Si A y B son compatibles, se cumple lo siguiente.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$

Entonces, se verificó que A y B son compatibles.

Destreza con criterios de desempeño: Operar con evento unión para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Ten en cuenta el experimento "lanzar un dado cúbico" y los eventos A y B mencionados en cada caso. Después, marca la opción que consideras correcta.

a. A: "sacar número par" B: "sacar número impar"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

b. A: "sacar número par" B: "sacar un múltiplo de 3"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

c. A: "sacar número primo" B: "sacar el número 5"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

3 Considera el experimento y los sucesos A y B que se proponen en cada caso. Después, determina el suceso $A \cup B$ y calcula su probabilidad.

Experimento	Un grupo de estudiantes está conformado por doce niños y diez niñas.
Suceso A	Seleccionar tres niños.
Suceso B	Seleccionar cinco niñas.
Suceso A ∪ B	
P(A ∪ B)	

Experimento	Se lanza un dado cúbico. Una de sus caras no está marcada y las otras están marcadas con los números 15, 20, 25, 30, 35.
Suceso A	Salir número divisor de 100.
Suceso B	Salir número múltiplo de 10.
Suceso A ∪ B	
P(A ∪ B)	

Tabla 2

4 Observa la urna de la figura 2 y los sucesos A, B, C y D que se determinan a partir de ella. Después, halla la unión de cada grupo de sucesos y su probabilidad.

A: "sacar bola roja"
B: "sacar bola morada"
C: "sacar número par"
D: "sacar número menor que 7"

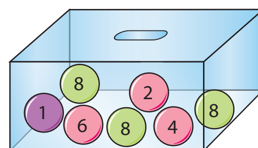


Figura 2

a. $A \cup B$ b. $A \cup C$ c. $A \cup D$
d. $B \cup C$ e. $B \cup D$ f. $A \cup B \cup C$
g. $C \cup D$ h. $A \cup C \cup D$ i. $B \cup C \cup D$

Comunicación

5 Decide si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. Dos sucesos son incompatibles si $P(A \cup B) = 0$. ( )

b. Si dos sucesos son compatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ( )

c. Si A es un suceso imposible, entonces $A \cup B$ es un suceso imposible. ( )

d. Si A y B son sucesos seguros, entonces $A \cup B$ es un suceso seguro. ( )

Razonamiento

6 ¿Es posible para un experimento y dos sucesos A y B tener las siguientes probabilidades?

a. $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

b. $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}8$

c. $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cup B) = 0{,}2$

7 Analiza cada pregunta y justifica tu respuesta.

a. ¿Dos sucesos contrarios son compatibles?

b. ¿Dos sucesos compatibles son contrarios?

8 Propón un ejemplo de un experimento con dos sucesos compatibles y dos incompatibles. Calcula en cada caso la probabilidad de la unión de los sucesos.

Resolución de problemas

9 Para la clase de Ciencias Naturales cada estudiante debe seleccionar al azar un animal de la siguiente lista.

rana	conejo	oso	mariposa
zorro	vaca	ardilla	venado
pato	pingüino	paloma	canario
salmón	cóndor	atún	caracol
chimpancé	loro	abeja	oveja

Aurora es la primera en pasar a seleccionar el animal sobre el cual debe exponer. Resuelve lo siguiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione un mamífero cuyo nombre empiece por una consonante?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que elija un ave cuyo nombre empiece por "c"?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que saque el nombre de un animal doméstico cuyo nombre empiece por "o"?

7 Probabilidad de eventos o sucesos en experimentos compuestos

Explora

Se lanza una moneda y simultáneamente se hace girar la ruleta marcada con los números del 1 al 4.





Figura 1

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en la moneda y tres en la ruleta?

La acción de lanzar una moneda y anotar su resultado es un experimento simple. Igualmente, hacer girar una ruleta y anotar el resultado obtenido es otro experimento simple. Por el contrario, el experimento que consiste en lanzar una moneda y girar una ruleta numerada, simultáneamente, es un experimento compuesto.

Un **experimento simple** no se puede descomponer en dos experimentos.
Un **experimento compuesto** está formado por dos o más experimentos simples.

Para determinar el espacio muestral del experimento de lanzar la moneda y girar la ruleta al tiempo, se utiliza un diagrama de árbol como el de la Figura 2

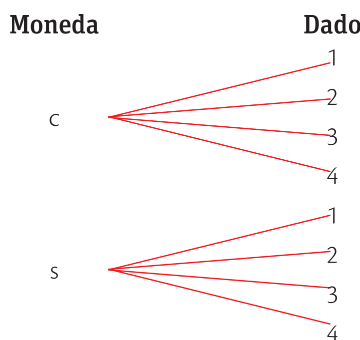


Figura 2

El espacio muestral es: $E = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4)\}$

El suceso del que se quiere calcular la probabilidad es: $\{(c, 3)\}$

Por lo tanto: $P(c, 3) = \dfrac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \dfrac{1}{8}$

Ahora, si se calculan las probabilidades de cada suceso, se tendría:

- La probabilidad de que caiga cara en la moneda es $\frac{1}{2}$.
- La probabilidad de que salga 3 es la ruleta es $\frac{1}{4}$.

7.1 Regla del producto

En un experimento compuesto, la **probabilidad de un camino del diagrama de árbol** es igual al producto de las probabilidades de cada una de las ramas que componen dicho camino.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener par en el primer dado y múltiplo de tres en el segundo?

Solución:

En el diagrama de árbol se ubica la probabilidad de ocurrencia de cada suceso o rama. (Figura 3).

$P(\text{par y múltiplo de 3}) =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

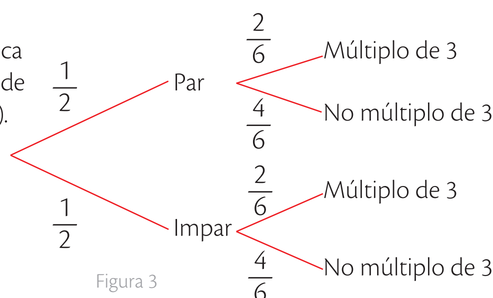


Figura 3

CULTURA del Buen Vivir

La perseverancia

Para alcanzar las metas que te propones es necesario que te sientas a gusto con lo que haces y ser constante en las tareas o rutinas necesarias para su cumplimiento.

- Cuando no comprendes fácilmente un tema de matemáticas, ¿aplicas tu perseverancia para cumplir el objetivo de aprenderlo?

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Ubica sobre cada rama de la figura 4 la probabilidad de ocurrencia de cada suceso y luego calcula la probabilidad del experimento compuesto.

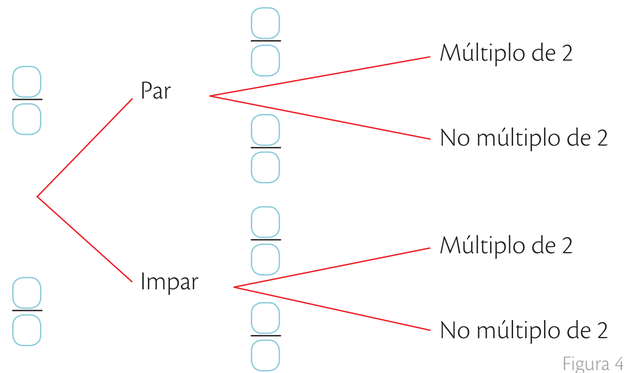


Figura 4

P (impar y múltiplo de 2) = $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

3 Ten en cuenta la información del diagrama de árbol y determina cuál es el experimento cuyos resultados se registran en la figura 5.

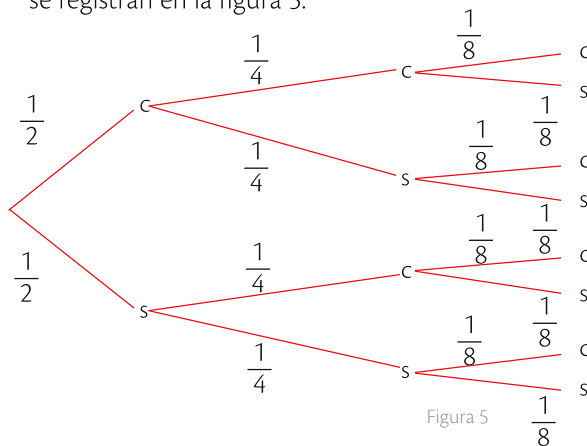


Figura 5

a. ¿Cuál es la probabilidad del suceso (c, s)?

b. ¿Cuál es la probabilidad del suceso (c, s, c)?

Comunicación

4 Indica si cada experimento que se describe es compuesto o no. Marca con una X la casilla correcta.

a. Lanzar dos dados numerados y registrar la suma de los números.	Sí	No
b. Lanzar un dado tres veces y registrar los resultados.	Sí	No
c. Seleccionar tres estudiantes de un grupo de 20 estudiantes.	Sí	No
d. Sacar una letra de una palabra.	Sí	No

Razonamiento

5 Se lanza una moneda tres veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar tres sellos.

b. Obtener al menos una cara.

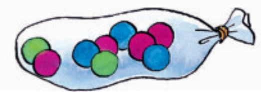
c. No obtener ninguna cara.

6 Se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Determina la probabilidad de cada caso.

a. Obtener tres veces el número 5.

b. Obtener tres números impares.

Resolución de problemas



7 De un grupo de 12 niños y ocho niñas, se escogen a dos estudiantes. Halla la probabilidad de cada opción dada.

a. Dos niños.
b. Un niño y una niña.
c. Tres niños.
d. Un niño y cuatro niñas.
e. Un niño.
f. Cinco niñas y dos niños.

8 Una bolsa contiene cuatro bolas rojas, tres azules y dos verdes. Si se extraen, sin devolución, dos bolas de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de ocurrencia de los sucesos?

a. Extraer dos bolas rojas.

b. No extraer bola verde.

c. Extraer una bola roja y una azul.

9 Un comité de seis personas está conformado por cuatro hombres y dos mujeres. Entre ellos se debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una mujer como presidente?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a un hombre como tesorero.

10 Cristina lanza dos dados octaédricos numerados. Halla la probabilidad de que la suma de sus puntos dé los siguientes resultados.

a. 9

b. 4

c. par

d. impar mayor que 4



11 Elije dos de los juegos que se presentan a continuación, formula una situación relacionada con un experimento compuesto y resuélvelo.

8 Probabilidad de la intersección de sucesos

Explora

En un experimento se lanzan simultáneamente una moneda y un dado cúbico con los números del 1 al 6.



- ¿Qué probabilidad existe de que se obtenga como resultado *A*: "cara" y *B*: "número par"?

Al lanzar simultáneamente una moneda y un dado, los dos eventos *A*: "cara" y *B*: "número par" pueden suceder al tiempo, ya que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Sin embargo, existen otros sucesos cuya probabilidad depende de la ocurrencia o no de otro. Tal es el caso de un experimento en el que se deba extraer una bola después de que ya se haya elegido una y no se haya vuelto a introducir en la urna.

Para poder reconocer estas relaciones entre los sucesos probabilísticos, se estudia la intersección de sucesos independientes y la intersección de sucesos dependientes.

8.1 Intersección de sucesos independientes. Probabilidad

Se considera que *A* y *B* son **sucesos independientes** si la probabilidad de que ocurra *A* no afecta la probabilidad de que ocurra *B*.

La **probabilidad** de que ocurran dos sucesos independientes simultáneamente se denota como $P(A \cap B)$ y se calcula como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ejemplo 1

Determina la probabilidad de obtener cara y de obtener un número par en el lanzamiento simultáneo de una moneda y un dado.

En este caso, la probabilidad de obtener "cara" es $P(A) = \frac{1}{2}$ y la probabilidad de obtener "número par" es $P(B) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8.2 Intersección de sucesos dependientes. Probabilidad

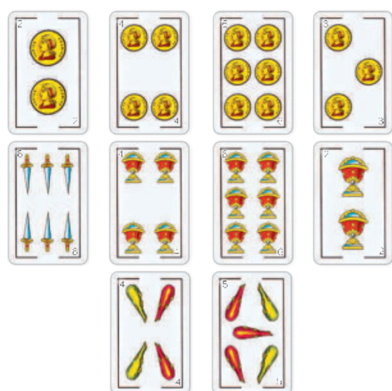
Se considera que *A* y *B* son **sucesos dependientes** cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

La **probabilidad** de **ocurrencia consecutiva** de *A* y *B* es igual a la probabilidad de que suceda *A* por la probabilidad de que suceda *B* (una vez ocurrido *A*).

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Considera el juego de cartas de la izquierda. Si se determinan los sucesos *A*: "sacar una carta de oros" y *B*: "sacar una carta de copas", ¿cuál es la probabilidad de obtener carta de oros en la primera extracción y carta de copas en la segunda extracción.?



Solución:

- La probabilidad de obtener carta de oros en la primera extracción es: $P(A) = \frac{2}{5}$
- La probabilidad de obtener carta de copas en la segunda extracción es: $P(B) = \frac{1}{3}$
- Así, la probabilidad de la ocurrencia sucesiva de los eventos A y B es: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Destreza con criterios de desempeño: Operar con evento intersección para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Ten en cuenta el experimento "seleccionar sucesivamente dos cartas de una baraja de póquer, sin devolver la primera" y los eventos *A* y *B*, mencionados en cada caso. Luego, marca con ✓ las opciones correctas.

a. *A*: "sacar un as" *B*: "sacar un as"

A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

b. *A*: "sacar un as" *B*: "sacar una Q"

A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

c. *A*: "sacar una Q" *B*: "sacar una J"

A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

3 Considera el experimento y los sucesos *A* y *B* que se proponen en cada caso. Luego, determina el suceso $A \cap B$ y calcula su probabilidad.

Experimento	Lanzar dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul. En ambos, las caras están numeradas del 1 al 6.
Suceso *A*	Sacar un número impar en el dado rojo.
Suceso *B*	Sacar un múltiplo de 3 en el dado azul.
Suceso A ∩ B	
P(A ∩ B)	

Experimento	De una urna con cinco bolas rojas y tres azules, extraer dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera.
Suceso *A*	Sacar bola roja en el primer turno.
Suceso *B*	Sacar bola azul en el segundo turno.
Suceso A ∩ B	
P(A ∩ B)	

Tabla 1

4 Se lanzan simultáneamente dos dados (Figura 1)



Figura 1

a. Escribe el espacio muestral del experimento.

b. Halla la probabilidad de obtener 3 en el dado rojo.

c. Halla la probabilidad de sacar 4 en el dado verde.

d. Calcula la probabilidad de obtener 3 en el dado rojo y 4 en el verde.

Razonamiento

5 La baraja inglesa se compone de 52 cartas, distribuidas así: 13 corazones,13 diamantes, 13 tréboles y 13 picas.



De la baraja se extraen dos cartas con reposición, es decir, se extrae una carta, se retorna a la baraja y luego se extrae una segunda carta.

- Calcula la probabilidad de que la primera carta que se extraiga sea corazón y que la segunda sea diamante.

6 Ten en cuenta el espacio muestral del experimento: "lanzar dos monedas de igual denominación, pero de diferente color".

$$E = \{(c, c), (c, s), (s, s), (s, c)\}$$

Calcula la probabilidad de obtener estas opciones, considerando que una moneda es amarilla y la otra blanca.

a. Cara en la moneda amarilla.

b. Cara en la moneda blanca.

c. Sello en la moneda amarilla.

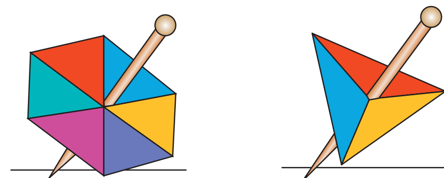
d. (c, c)

Resolución de problemas



7 En un grupo de 30 estudiantes, seis obtuvieron una nota superior a 8 en el primer examen de matemáticas. Si tres estudiantes son escogidos al azar para participar en las olimpiadas matemáticas del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estudiantes hayan obtenido una nota superior a 8 en el primer examen de matemáticas?

8 Roberto y Carolina giran simultáneamente las perinolas de la figura 2.


Figura 2

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos caigan simultaneamente en el color amarillo?

b. ¿ Cuál es la probabilidad de que al girar primero la perinola triangular, la otra caiga en el mismo color?

Prueba Ser Estudiante



A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Se hace un estudio acerca del tiempo que dedican los niños de entre 8 y 12 años del sector norte de Quito a practicar un deporte, para esto se seleccionan 100 niños de 10 barrios, 10 por cada barrio. La variable de este estudio es:

A. El tiempo

B. los niños entre 8 y 12 años

C. el deporte que practican los varios

D. los barios

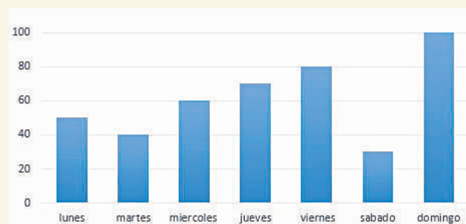
2. La gráfica muestra el número de almuerzos que se venden en un restaurante cada día, en la semana se vendieron:

A. 360

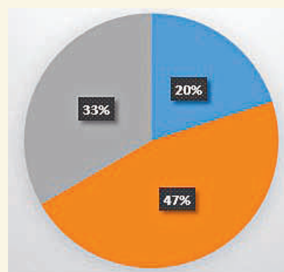
B. 380

C. 410

D. 430



3. Para la gráfica si el 33% equivale a 30 estudiantes, el 47% corresponde a:



A. 50 B. 70

C. 130 D. 150

4. Es una variable cuantitativa:

A. el nombre de los candidatos a alcalde de Quito

B. el número de hijos de varias familias

C. el color de pintura para las paredes de la casa

D. la institución con mayor credibilidad del país

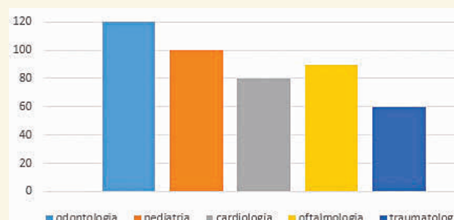
5. La grafica muestra el número de consultas médicas por especialidad durante un mes en un centro de salud, el porcentaje de consultas que corresponde a pediatría es

A. 42,6 %

B. 32,5 %

C. 22,2 %

D. 12,4 %



6. Se lanzan dos dados al aire, el número de sucesos elementales es:

A. 12

B. 24

C. 36

D. 48

7. Si lanzamos un dado podrían presentarse dos sucesos: A que salga un número par y B que salga un número impar. Los dos sucesos son:

A. compatibles

B. imposibles

C. muestrales

D. aleatorios

8. Se extrae de forma aleatoria, de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, 1 bola. El espacio muestral es de:

a. 9

b. 8

c. 10

d. 18

9. Se lanza un dado en el que se notan dos sucesos: A = sale un número par, B = sale un número impar. A∩B es:

A. ϕ C. {1, 3, 5}

B. {2, 3, 5} D. {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Indicadores de logro:

- Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.
- Utiliza información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.
- Calcula probabilidades de eventos aleatorios.

10. De los 2 200 asistentes a una feria de exposiciones de madera se verificó que al 30% le interesaron los juegos de sala. Si el porcentaje de interesados en juegos de dormitorio fue el 25% de los interesados en los juegos de comedor, ¿Cuántas personas se interesaron por los juegos de dormitorio?

A. 660

B. 550

C. 495

D. 165

11. De una baraja de 52 cartas, se desea obtener una carta menor de 6, el número de sucesos elementales es de:

A. 52

B. 24

C. 20

D. 6

12. Se gira una ruleta numerada del 1 al 24 si se consideran los siguientes sucesos: a) divisores del 15, b) número menor de 10, c) múltiplo de 4, d) números pares. Los sucesos compatibles son:

A. b y d

B. a yc

C. a y b

D. a y d

13. En una caja hay 8 papeles, cada uno con un nombre: Lucía, Ramiro, Luis, Ángel, Doris, Lina, Mario y Luz. Se consideran los sucesos: M= extraer un nombre de femenino, Q=extraer un nombre de más de 4 letras. El número de elementos de MUQ son:

A. 7 **C.** 4

B. 5 **D.** 3

14. En un restaurant se muestra un cuadro de 4 elementos para formar su almuerzo. Las posibles combinaciones son:

1	2	3	4
pollo carne	arroz tallarín verduras	frejol lenteja garbanzo	agua gaseosa jugo avena

A. 24 **C.** 72

B. 36 **D.** 84

15. De una baraja de 52 cartas, la posibilidad de sacar una carta de numero par es:

A. 9,61 %

B. 38,46 %

C. 51,34 %

D. 60, 02 %

16. En una urna se encuentran 10 bolitas, cada una con un nombre: perro, gato, oso, león, gato, jirafa, lobo. Si tomamos los sucesos A: nombre de animal doméstico, B: nombre de animal de más de 4 letras. La probabilidad de AUB es:

A. $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{2}{7}$

C. $\frac{3}{7}$ **D.** $\frac{4}{7}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Préstamos y créditos

Generalmente se considera que las palabras préstamo y crédito son sinónimas, pero en realidad a nivel financiero, se trata de conceptos distintos.



Préstamo

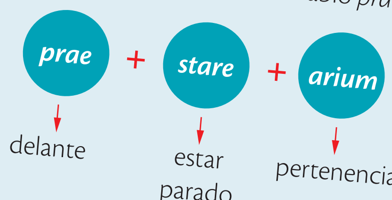
Un préstamo es la operación financiera en la que una entidad o persona, llamada el prestamista, entrega otra, llamada el prestatario, una cantidad fija de dinero con la condición de que este dinero sea devuelto junto con los intereses pactados en un plazo determinado.

Esta devolución normalmente se realiza mediante unas cuotas regulares a lo largo de un plazo definido. Por lo tanto, la operación tiene una vida determinada previamente y los intereses se cobran sobre el total del dinero prestado.



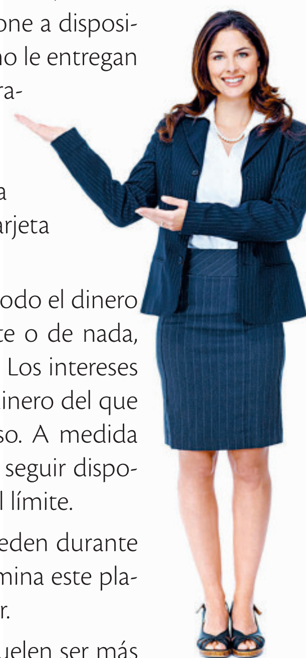


La palabra préstamo viene del vocablo *praestarium*



Un préstamo es una cesión o entrega de un bien que se hace a condición de devolución.

Crédito



Un crédito es la cantidad de dinero, con un límite fijo, que una entidad pone a disposición de un cliente. Al cliente no le entregan el dinero al inicio de la operación, sino que tiene la oportunidad de utilizarlo según su necesidad, a través de una cuenta bancaria o de una tarjeta de crédito.

El cliente puede disponer de todo el dinero inmediatamente, de una parte o de nada, según él mismo lo determine. Los intereses se pagan únicamente por el dinero del que efectivamente haya hecho uso. A medida que devuelve el dinero podrá seguir disponiendo de más, sin pasarse del límite.

Los créditos también se conceden durante un plazo, pero, cuando se termina este plazo, se puede renovar o ampliar.

Los intereses de los créditos suelen ser más altos que los de un préstamo.

SM Ediciones

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

Trabajo en grupo

1. Lean la información del texto: Diciembre... mes de deudas.
2. Pregunten a tus papás cómo se organizan para cubrir los gastos en el mes de diciembre. Escriban en su cuaderno los detalles más importantes como: cuánto dinero gastan, cómo organizan el presupuesto de obsequios navideños, cuánto dejan para vacaciones, etc.

Diciembre... mes de deudas

La temporada navideña exige un desembolso superior al de otros periodos del año, haciendo que el nivel de endeudamiento de las familias se eleve hasta cuotas que pueden calificarse como peligrosas. Los regalos, las fiestas y los viajes se llevan una gran parte del presupuesto.

Entre los productos financieros, las tarjetas de crédito quizá sean el más utilizado para afrontar los gastos navideños. Son fáciles de usar, están al alcance de casi todo el mundo y no necesitan de una concesión previa para retirar el dinero deseado. Pero si no se emplean con rigor, pueden ocasionar serios contratiempos, ya que habrá que cumplir sus plazos de devolución en los próximos meses, con sus correspondientes intereses y comisiones.

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Z (multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.

¿Para qué se endeudan los Ecuatorianos?

Debido a la variedad de préstamos y créditos, los hábitos de compra de los ecuatorianos cambiaron en los últimos años. Actualmente es más fácil adquirir bienes de consumo que antes estaban limitados a un círculo específico; este fenómeno se presenta, en su mayoría, gracias a que las personas tiene mayor acceso a las llamadas "tarjetas de crédito".



En Colombia, los créditos de consumo abrieron la puerta a la compra fácil de vehículo, el financiamiento de estudios de postgrados e incluso la compra masiva de electrodomésticos para el hogar.

¿Es mejor endeudarse o ahorrar?

A primera vista, utilizar el dinero de otros y devolverlo después parece más fácil que ahorrar. El tomar un préstamo no exige ningún sacrificio inmediato, se consigue el dinero rápidamente y no hay que preocuparse de devolverlo hasta más adelante. Pero para poder decidir qué es más fácil realmente, entre de adquirir una deuda y ahorrar es importante tener en cuenta varios aspectos:



1. **Comparar** los costos y beneficios que otorga dicho producto o servicio.
2. **Evaluar** las necesidades reales respecto de los beneficios de lo que se va a adquirir.
3. **Conocer** las características del producto adquirido, la forma de cobro de los intereses y un cálculo de cuánto se va a pagar de más.
4. **Comparar** las opciones que dan las diferentes entidades bancarias.
5. **Adquirir** un préstamo puede resultar caro, arriesgado y difícil.

Pregunta tipo Saber

En Colombia los bancos pueden prestar para créditos hipotecarios máximo el 70% del costo total de la vivienda.



Teniendo en cuenta este porcentaje se puede afirmar que:

A. Para una vivienda que cuesta \$ 105 000 el monto máximo del crédito es de \$ 78 750

B. Una persona que obtuvo un crédito por \$ 70 000 compró una vivienda de \$ 100 000.

C. Una persona que compró una vivienda de \$ 245 000 obtuvo un crédito de \$ 150 000.

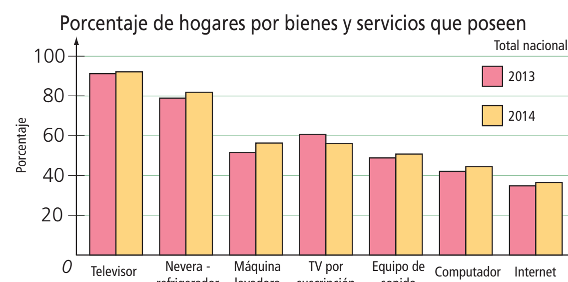
D. Una persona que compró una vivienda de \$ 190 000 obtuvo un crédito de \$ 152 000.

Administración de recursos

3 Lee el siguiente artículo:

> Muchos ecuatorianos tienden a comprar cosas que no necesitan y, a endeudarse para ello.
>
> Por eso no es raro ver en supermercados a una familia, aparentemente humilde, salir con un gran televisor de última tecnología, que seguramente compró a crédito. Alguien que los observa puede pensar: ¿Tendrán cómo pagar el crédito?... Y si pueden, ¿no sería mejor invertir en la educación de los hijos?... ¿Tendrán vivienda propia? Y si no, ¿pensarán comprarla?

4 Revisa la gráfica que se presenta a continuación y teniendo en cuenta el artículo, elabora una interpretación de ella.



MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

Habilidades digitales

Argumenta tus ideas a través de un avatar digital

Voki es una herramienta que permite la creación de un personaje virtual que hable y se vea tal y como desees. Además, puedes compartirlo en tus redes o páginas sociales. En esta actividad aprenderás a crear un avatar educativo por medio de Voki.

1 Abre una cuenta en Voki

a. Ingresa a tu correo electrónico personal.

b. En otra pestaña o ventana de tu navegador, ve al link **http://www.voki.com/** da clic sobre "Register" y crea una cuenta. Para ello, diligencia los datos solicitados y oprime el botón "Sign Up".

c. Cierra la ventana emergente ("Close") y ubica el mensaje enviado por Voki a tu correo. Da clic sobre el link de activación para completar el registro.

d Escribe tu email y contraseña e ingresa a Voki.

e. Da clic sobre el botón XXX

2 Reconoce el entorno de creación de personajes virtuales de Voki:

a. Botones de herramientas

b. Pantalla de previsualización



3 **Crea** tu propio avatar virtual en Voki

a. Realiza una búsqueda de información confiable en internet (textos, imágenes, videos, documentos) sobre probabilidad en actividades cotidianas. Piensa y escribe un texto con 10 razones por las cuales convenzas al lector de la importancia del conocimiento sobre las operaciones con probabilidad.



b. Usa el menú "Customize Your Character" para escoger el rostro, la ropa y los accesorios de tu avatar. Luego da clic sobre "Done".

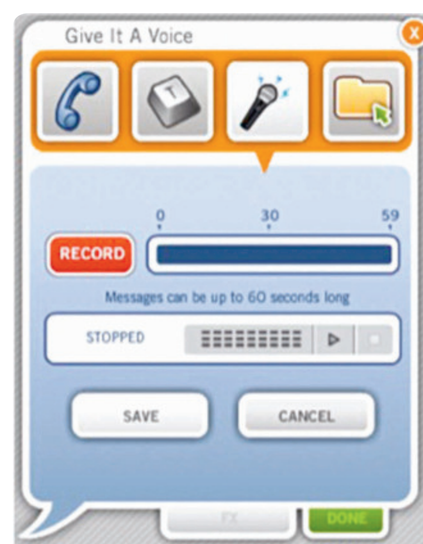
4 **Añade** a tu personaje virtual tu propia voz

a. Aprovecha el menú "Give It A Voice", en la opción micrófono, para grabar el texto con las 10 razones previamente escritas. Escoge la opción "Permitir" en la ventana emergente de la configuración de Adobe Flash Player y luego "Cerrar".

b. Da clic sobre el botón "Record" para iniciar la grabación y "Stop" para detenerla.

c. Rectifica con el botón de reproducción ▷.

d. Si consideras que ya está lista la grabación, da clic sobre "Save" y luego sobre "Done". Ten en cuenta que sólo tienes 60 segundos.



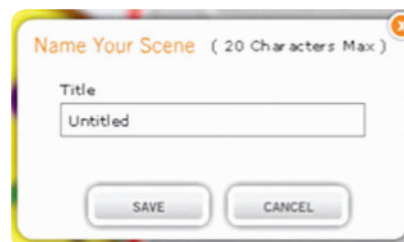
5 **Comparte** tu avatar de Voki vía correo

a. Da clic sobre el botón "Publish"

b. Escribe un título llamativo de máximo 20 caracteres y luego da clic sobre el botón "Save".

c. Diligencia los datos solicitados e ingresa nuevamente a Voki con tu email y contraseña.

d. Envía tu personaje a los compañeros de clase.





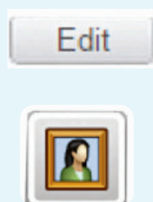
Aprende más

Mejora tu personaje virtual

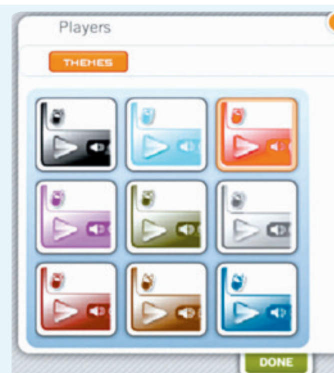
a. Da clic sobre el botón XXx.

Edit

b. Emplea el menú "Players" para editar el color del marco del personaje. Luego selecciona "Done".



c. Repite el paso 5.



Evaluación de la Unidad



Medidas de posición central

Ejercitación

1. Con base en la información, responde verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

Estas son las calificaciones de un grupo de estudiantes.

3,3	3,3	3,8	3,1	4,8
4	3,2	2,5	3,7	3,7
3,4	1,9	2	3,1	4,1
3,5	4,5	3,3	4	4,1

a. El promedio del curso fue de 3,465. ( )

b. Más de la mitad del curso tiene su nota inferior a 3,4. ( )

c. La calificación final que más se presentó fue el 3,5. ( )

d. El promedio de las calificaciones es mayor a la mediana de los datos. ( )

e. El curso se aprueba con 3,5; más de la mitad del curso aprobó el curso. ( )

Medidas de posición no central

Comunicación

2. Una panadería identificó el número de clientes que tuvo en los primeros nueve días en que estuvo abierta al público; el número de clientes fue

200	295	250	275	351
235	257	267	400	

- Determina los cuartiles y plantea algunas conclusiones.

Medidas de dispersión

Razonamiento

3. Una empresa estandariza la producción mensual de implementos de aseo en 3 500, en los últimos siete meses la producción fue la siguiente

3 500	3 490	3 505	3 502
3 498	3 503	3 500	3 496

La varianza de los datos es:

a. 4,68

b. 14,06

c. 19,92

d. 153,5

Comunicación

4. La tabla presenta el número de personas que asistieron diariamente a un evento empresarial durante una semana.

Lunes 950	Martes 900	Miércoles 900	Jueves 980
Viernes 1 285	Sábado 1 430	Domingo 975	

Calcula la desviación estándar. ¿Es una buena medida para describir la variación de los datos? Explica.

Experimentos y sucesos aleatorios

Ejercitación

5. Considera el siguiente espacio muestral

S = {Oro, níquel, bromo, helio, yodo, plata} y los eventos:
A = {Oro, plata, níquel}
B = {Níquel, helio, yodo, plata}

Los elementos de $A \cap B$ son:

a. C = {Bromo}
b. C = {Oro, bromo, yodo, helio}
c. C = {Oro, helio, yodo}
d. C = {Níquel, plata}

Diagrama de árbol

Resolución de problemas

6. Una constructora ofrece a un comprador una construcción a elección de uno, dos, tres o cuatro pisos, en los estratos tres, cuatro, cinco y seis. ¿Con cuántas opciones cuenta el comprador para elegir una?

7. Una empresa de calzado le da la opción a sus clientes decidir el cómo quiere el producto, puede escoger una de dos tipos de suela, uno de cinco colores disponibles así como uno entre cuatro colores de cordones. Identifica el número de combinaciones con que cuenta un cliente que desea un par de zapatos.



8. Una empresa confecciona uniformes para equipos de fútbol. Si dispone de camisetas de seis colores distintos, pantalonetas de ocho colores diferentes y medias de tres colores distintos, ¿cuántos uniformes diferentes se pueden formar? Representa el diagrama de árbol.

Probabilidad de sucesos

Ejercitación

9. Relaciona cada evento con la probabilidad de que ocurra. Se cuenta con una baraja de póker de 54 cartas.

a. Sacar un comodín. • $\frac{2}{27}$

b. Sacar una carta de corazones. • $\frac{13}{27}$

c. Sacar una carta con figura roja. • $\frac{2}{9}$

d. Sacar un cinco. • $\frac{13}{54}$

e. Sacar una J, Q o K. • $\frac{1}{27}$

Resolución de problemas

10. El administrador de una empresa de taxis presentó los datos acerca de los días en los que cada vehículo estuvo en servicio.

Taxi	Días en servicio	Días en mantenimiento
1	293	67
2	286	74
3	262	98
4	308	52
5	300	60

- ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los taxis esté en mantenimiento?

Probabilidad de la unión de sucesos

Resolución de problemas

11. Se cuenta con un grupo de personas para seleccionar a un representante en unas olimpiadas matemáticas. Los datos se presentan en la siguiente tabla:

Nombre	Felipe	María	Luis	Leticia	Milena
Edad	14	16	14	13	17

a. Determina la probabilidad de seleccionar una mujer o una persona mayor de 14 años.

b. Determina la probabilidad de seleccionar un hombre o una mujer.

c. Determina la probabilidad de seleccionar un hombre o una persona menor de 16 años

Probabilidad en experimentos compuestos

Ejercitación

12. Un viajero plantea visitar España o Italia y luego visitar Colombia, India, Perú, Brasil o China. Establece la probabilidad de que escoja Italia y un país asiático.

a. 0,2

b. 0,3

c. 0,5

d. 0,75

Probabilidad de la intersección de sucesos

Resolución de problemas

13. Se realiza una competencia canina entre Golden retriever y Labradores retriever, en la tabla se relaciona la raza y el sexo de los competidores.

Raza	Edad
Golden retriever	Hembra
Labrador retreiver	Macho
Golden retriever	Hembra
Golden retriever	Macho
Labrador retreiver	Hembra
Golden retriever	Hembra
Labrador retreiver	Macho
Golden retriever	Macho
Labrador retreiver	Hembra
Labrador retreiver	Macho
Golden retriever	Hembra

- ¿Cuál es la probabilidad de que la competición la gane una Golden retriever?

14. Determina la probabilidad que tiene una persona de ganar una rifa si la boleta cuenta con un número de cuatro cifras y un signo zodiacal. Explica el proceso que seguiste.



Boletín para promover la igualdad de género en el colegio



SM Ediciones

Competencias ciudadanas

- Construyo relaciones pacíficas que contribuyen a la convivencia cotidiana en mi comunidad y en mi municipio.
- Analizo de manera crítica los discursos que legitiman la violencia.



Acércate al tema

- La igualdad de género busca dar el mismo valor a hombres y mujeres por respeto a su dignidad como personas. La dignidad es una cualidad que confiere a los humanos un valor que nadie puede despreciar, dañar o minusvalorar, y que se debe proteger por todos los medios.
- La discriminación es la acción contraria al respeto de la igualdad de género. Se considera que estas actitudes se aprenden a través de la observación de las relaciones familiares, la publicidad, los textos escolares, las canciones, los medios de comunicación, los dichos y otras formas de expresión cultural.
- A continuación se muestran algunos estereotipos masculinos y femeninos que culturalmente se transmiten y contribuyen a la discriminación de género.



La igualdad de género promueve el respeto por la dignidad de una persona sin que importe si es hombre o mujer.



La discriminación es una conducta negativa en el trato a las personas por pertenecer a un grupo.



Un estereotipo es un conjunto de creencias acerca de las características de un grupo. Es una generalización sin fundamento.



SM Ediciones



SM Ediciones

Estereotipos masculinos	Estereotipos femeninos
Tendencia al dominio	Falta de control
Valentía	Dependencia
Franqueza	Miedo
Cualidades y aptitudes intelectuales	Aptitud para las letras
Aptitud para las ciencias	Aptitudes manuales

Actividades

1. ¿Crees que las mujeres son más débiles que los hombres? Explica tu respuesta.
2. ¿Conoces alguna o algunas canciones que promuevan la discriminación de género? Elabora una lista de ellas y escriban por qué consideran que van en contra de la igualdad entre hombres y mujeres.
3. ¿Cómo puedes ayudar a alguien que es víctima de discriminación de género?

¿? Y tú ¿qué harías?

Un caso muy particular que va en contra de la igualdad de género, es el fenómeno de la violencia en contra de las mujeres. Los esfuerzos para hacer visible este hecho han promovido que al fin se evidenciara como un problema de carácter social y que se considere como delito en algunos países del mundo. La discriminación hacia la mujer y los grupos minoritarios es una realidad que debemos cambiar.

A continuación realizarás un proyecto relacionado con el respeto por la igualdad de géneros en el colegio; para ello, emplearás boletines informativos que promuevan el respeto de la dignidad humana sin importar el género, la raza, la condición social, u otras características físicas o culturales.



SM Ediciones

Desarrolla el plan de trabajo

Trabajo en individual

- Identifica el objetivo del proyecto.
- Responde en tu cuaderno: ¿qué aspectos culturales se deben modificar para garantizar la igualdad de género?
- Consulta acerca de cómo se realiza un boletín informativo.

Trabajo en grupo

Con todo el curso

a. Pongan en común los objetivos planteados y determinen uno solo para el boletín sobre igualdad de género en el colegio.

b. Establezcan una plenaria o una mesa redonda en la que puedan analizar las respuestas a la pregunta: ¿qué aspectos culturales se deben modificar para garantizar la igualdad de género?

c. Definan con ayuda del profesor: los criterios para realizar el proyecto; los recursos humanos, técnicos y tecnológicos; los contenidos (textos, imágenes, publicidad, tablas, gráficos), y la manera en la que se compartirán los boletines con el resto de la comunidad educativa.

d. Concierten con el profesor los criterios de evaluación: ¿cómo se va a evaluar? ¿Quién o quiénes van a evaluar? ¿Qué aspectos individuales y de equipo se trendrán en cuenta para la evaluación?

Trabajo por grupos

a. Formen grupos de trabajo para hacer un análisis estadístico sobre la igualdad de género y para profundizar sobre estereotipos que promueven acciones en contra del respeto de la dignidad de hombres y mujeres.

b. Elaboren, como conclusión del análisis estadístico, del trabajo de profundización y de la mesa redonda, un boletín sobre la temática que les haya correspondido con relación a los estereotipos y la discriminación de género. Este debe contener datos estadísticos y estar escrito y diseñado con un lenguaje incluyente.



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Trabaja con el área de matemáticas

Trabajo en grupo

La estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de los métodos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones basadas en dicho análisis.

1. ¿Cada grupo debe profundizar acerca de uno de los siguientes estereotipos. Para ello deben investigar haciendo indagaciones entre sus familiares y amigos. También deben documentarse acerca de los datos estadísticos que se relacionan con cada situación.

a **Grupo 1**

Los estereotipos que promueven la desigualdad con relación a los oficios y profesiones que ejercen mujeres y hombres.



b **Grupo 2**

Los estereotipos que promueven la discriminación con relación a juegos, juguetes y videojuegos que utilizan mujeres y hombres.

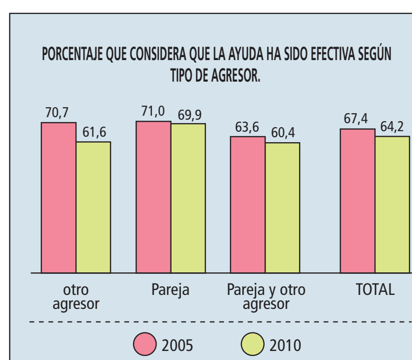


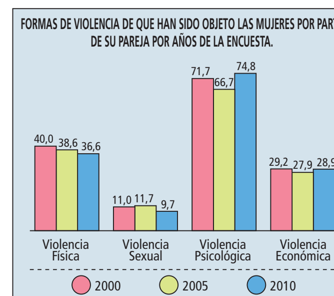
c **Grupo 3**

Los estereotipos que promueven la desigualdad en la publicidad, tanto de mujeres como de hombres.



2 Analicen la información que se presenta en las gráficas de barras y establezcan si los resultados se relacionan con alguno de los estereotipos que se han planteado anteriormente.





Escriban sus conclusiones:

....

....

....

SM Ediciones



Da a conocer tu trabajo

La presentación del trabajo se hará en dos momentos: el primero, con el análisis estadístico y el trabajo de profundización sobre estereotipos que promueven la desigualdad de géneros; y el segundo, con la elaboración del boletín.

- Primer momento
  1. El profesor intervendrá en la participación de cada grupo para generar claridades, evitar malos entendidos y despejar dudas e interrogantes.
  2. Cada grupo dispondrá de 5 a 8 minutos para su intervención.
  3. Al finalizar la participación de cada grupo se abrirá un espacio para aclarar, especificar, ampliar los argumentos y sacar conclusiones.
- Segundo momento
  1. Se realizará en la fecha previamente establecida para tal fin, a partir de la concertación hecha con los compañeros de clases y el profesor. Debe ser conocida y aceptada por todos.
  2. Los integrantes del grupo solicitarán al colegio el permiso para que los demás grados queden enterados de la socialización del proyecto.
  3. Cada grupo debe estar atento al trabajo de sus compañeros y realizar la evaluación correspondiente.
  4. Se debe tener claro y aprobado el espacio en el que se expondrán los boletines ante otras personas del colegio.
  5. Después de presentar los trabajos, pueden considerar evaluar el impacto que tuvo la intervención de cada grupo en la manera en la que se contribuyó a la relación entre los integrantes de la comunidad escolar.


SM Ediciones



Evalúa el trabajo realizado

De acuerdo con los criterios de valoración establecidos para este proyecto, evalúen el resultado obtenido, teniendo en cuenta la participación de sus compañeros, el profesor y el criterio personal.



Comprométete

Después de tu participación en el proyecto, amplía la lista de los compromisos que vas a asumir frente al tema.

1. Voy a evitar la violencia de cualquier forma en contra de las personas con las que comparto diariamente.
2. Denunciaré y defenderé a quienes sean víctimas de violencia y discriminación en mi colegio.
3. ....

   ....
4. ....

   ....

Evaluación Final 

1. $\frac{-6}{5} - \frac{19}{5}$ es:

A. 3

B. -3

C. 5

D. -5

2. $\dfrac{\frac{-4}{6} + \frac{7}{8}}{\frac{-5}{8} - \frac{11}{20}} =$

A. $-\frac{25}{166}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{-34}{51}$

D. $\frac{12}{157}$

3. La expresión decimal que corresponde $\frac{21}{4}$ es:

A. 10,5

B. 8,5

C. 7,25

D. 5,25

4. La expresión fraccionaria que corresponde a 3,25 es:

A. $\frac{11}{2}$

B. $\frac{13}{4}$

C. $\frac{15}{7}$

D. $\frac{9}{5}$

5. Un objetivo del Estado es de que en el 2017 el 90% de las Instituciones educativas tengan acceso a internet. Si tuviéramos 230 instituciones, deberían tener acceso a internet:

A. 124

B. 189

C. 207

D. 212

6. De 180 animales de un zoológico el $\frac{4}{9}$ son salvajes, lo que corresponde a:

A. 80

B. 70

C. 60

D. 50

7. La fracción simplificada que corresponde a 35% es:

A. $\frac{7}{22}$

B. $\frac{6}{20}$

C. $\frac{9}{22}$

D. $\frac{7}{20}$

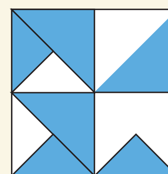
8. La figura corresponde a:

A. $\frac{8}{9}$

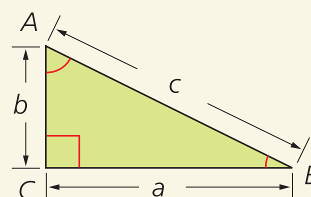
B. $\frac{9}{8}$

C. $\frac{8}{12}$

D. $\frac{9}{16}$



9. Para el triángulo de la figura, si c = 9 y b = 8, el valor de a es:



A. 1

B. $\sqrt{145}$

C. $\sqrt{17}$

D. $\sqrt{23}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

10. El polinomio $xy - 4x + y - 4$ factorizado es:

A. $(y + 4)(x - y)$

B. $(y - 4)(x + 1)$

C. $(y + 4)(x + y)$

D. $(y - 4)(x - y)$

11. La arista de un cubo de volumen $27m^3h^6g^{12}$, es:

A. $3mh^3g^6$

B. $3mh^2g^3$

C. $3mh^2g^4$

D. $3mh^3g^4$

12. Si el área de un rectángulo es $121d^6 - 9f^4$, sus lados son:

A. $(11d^2 - 3f)(11d^2 + 3f)$

B. $(11d + 3f^2)(11d - 3f^2)$

C. $(11d^3 - 3f)(11d^3 + 3f)$

D. $(11d^3 + 3f^2)(11d^3 - 3f^2)$

13. La expresión que representa el triple de la edad que tendré dentro de dos años es:

A. $2x + 4$

B. $x^2 + 4$

C. $x + 2$

D. $3x + 2$

14. Alberto tiene 3 años más que Rosi, la expresión simplificada que representa la suma de las edades que tendrán después de un años es:

A. $2x + 4$

B. $2x + 5$

C. $2x + 1$

D. $2x + 6$

15. Sabiendo que $x = -2$, $y = 3$, $z = 4$. El valor numérico de la expresión $-\frac{1}{2}x^3y^2 + 3x^2z^2$, es:

A. 220

B. 228

C. 230

D. 232

16. El polinomio $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}$ reducido es:

A. $\frac{10x^2 + 15x + 10}{30}$

B. $\frac{12x^2 + 5x + 18}{30}$

C. $\frac{4x^2 + 10x + 8}{30}$

D. $\frac{14x^2 + 15x + 9}{30}$

17. Si restamos $-\frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{2}z$ es:

A. $\frac{1}{4}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{18}z + \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y - 4z + \frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}x + \frac{6}{5}y - \frac{23}{18}z + \frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{2}x + \frac{1}{5}y - \frac{20}{18}z + \frac{3}{2}$

18. El área del rectángulo cuyo lado mayor excede en b al lado menor 2y es:

A. $y^2 + by$

B. $4y^2 + 2by$

C. $2y^2 + 2by$

D. $4y^2 + 4by$

Tabla de respuestas

10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

Evaluación Final



19. Los factores primos de 120 son:

A. $2 \times 5^3 \times 3^2$

B. $2^3 \times 5 \times 3$

C. $2^3 \times 3^3$

D. $2^3 \times 5^2$

20. El mcd de: 200, 1000 y 50 es:

A. 10

B. 30

C. 50

D. 100

21. El mcm de: 12, 2, 90 y 54 es:

A. 440

B. 540

C. 720

D. 840

22. La expresión: $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2$ factorizada es:

A. $2xy(xz - yz + xy)$

B. $xy(xz - 2yz + xy)$

C. $2yz(xy - xz + zy)$

D. $2xy(xz + yz - xy)$

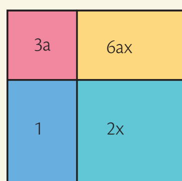
23. El área del rectángulo factorizada es:

A. $(x + 1)(2a + 1)$

B. $(2x + 1)(2a + 1)$

C. $(3x + 1)(2a + 1)$

D. $(2x + 1)(3a + 1)$



24. La expresión $4x^2 - 9$ es:

A. $(2x^2 + 6)(2x^2 + 6)$

B. $(x^2 - 6)(x^2 + 6)$

C. $(x^2 + 3)(x^2 + 3)$

D. $(2x + 3)(2x + 3)$

25. El producto de los factores $(5m + 3)(25m^2 - 15m + 9)$ es:

A. $5m^3 - 27$

B. $125m^3 + 36$

C. $25m^2 + 9$

D. $125m^3 - 27$

26. La expresión $32 - a^5$ factorizada es:

A. $(2 - a)(16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4)$

B. $(a - 2)(16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4)$

C. $(2 - a)(16 - 8a + 4a^2 - 2a^3 + a^4)$

D. $(a - 2)(16 + 8a - 4a^2 + 2a^3 - a^4)$

27. El término que falta para que el binomio $x^2 + 121$ sea un trinomio cuadrado perfecto es:

A. $2x$

B. $11x$

C. $22x$

D. $121x$

28. La probabilidad de sacar un múltiplo de 4 de una urna con 30 bolas numeradas del 0 al 30 es de es:

A. $\frac{9}{30}$

B. $\frac{8}{30}$

C. $\frac{7}{30}$

D. $\frac{6}{30}$

Tabla de respuestas

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

29. Se escogen tres cartas de tres colores distintos de cuatro posibles. El espacio muestral es de:

A. 22

B. 36

C. 24

D. 25

30. Se lanzan dos dados, la probabilidad de obtener un número par y un número mayor de 4 es:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{10}$

31. De una baraja compuesta de 10 cartas de corazones rojos, 10 de corazones negros, 10 de tréboles y 10 de diamantes se extrae primero una carta, se repone al maso y se extrae otra carta. La probabilidad de extraer una de corazón y otra de diamante es a:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{10}$

32. La probabilidad de que al lanzar una moneda cuatro veces saque 4 caras es de:

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{10}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{16}$

33. Dos sucesos A y B son incompatibles si:

A. $A \cap B = \varnothing$

B. $A \cup B = \varnothing$

C. $A' = \varnothing$

D. $A - B = \varnothing$

34. Son ecuaciones paralelas:

A. $x + 3y = 6,\ 3x + 9y = 10$

B. $x + y = 9,\ x + y = -1$

C. $x - y = 1,\ x + y = 7$

D. $x + y = 6,\ 3x + y = 1$

35. El punto que pertenece a la recta: $y = 9 - x$ es:

A. $(-5, 2)$

B. $(-1, 10)$

C. $(2, -3)$

D. $(4, -7)$

36. π es elemento de los conjuntos:

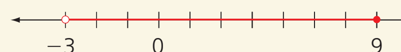
A. irracionales y reales

B. naturales y racionales

C. reales y enteros

D. enteros y racionales

37. La gráfica corresponde al intervalo:



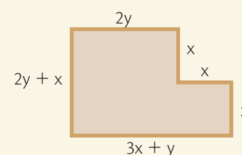
A. $[-3, 9)$

B. $(-3, 9]$

C. $[-3, 9]$

D. $(-3, 9)$

38. El perímetro de la figura es:



A. $7x + 5y$

B. $5x + 7y$

C. $3x + 2y$

D. $7x + 8y$

Tabla de respuestas

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D



39. El resultado de $\left(\frac{4}{5}j - \frac{7}{8}a\right)^2$ es:

A. $\frac{6}{25}j^2 - \frac{2}{5}aj + \frac{9}{64}a^2$

B. $\frac{8}{25}j^2 - \frac{7}{5}aj + \frac{9}{4}a^2$

C. $\frac{16}{25}j^2 - \frac{7}{5}aj + \frac{49}{64}a^2$

D. $\frac{16}{25}j^2 - \frac{2}{5}aj + \frac{9}{64}a^2$

40. La figura que se giro para obtener el cilindro como sólido es:

A. triángulo

B. semicírculo

C. rectángulo

D. trapecio

41. El área de un decágono regular de 5cm de lado y 9cm de apotema es:

A. 200 cm^2

B. 215 cm^2

C. 220 cm^2

D. 205 cm^2

42. El doble producto de las raíces de las expresiones $121c^4$, $81a^2$ es:

A. $198ac^2$

B. 11ac

C. $9a^2c$

D. $77a^2c^2$

43. Para que el trinomio $a^2 + 5ab + 49b^2$ sea un trinomio cuadrado perfecto se debe sumar y sustraer:

A. 8ac

B. 9ab

C. $9ab^2$

D. $4a^2b$

44. La expresión que representa los factores de $\frac{1}{25} - \frac{25m^4}{36}$ es:

A. $\left(\frac{1}{5}-\frac{5m^2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{5m^2}{6}\right)$

B. $\left(\frac{1}{5}-\frac{m^2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{m^2}{6}\right)$

C. $\left(\frac{1}{5}-\frac{5m^2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{5m^2}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1}{5}-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{m^2}{3}\right)$

45. El término que sumarías al binomio $\frac{a^2}{9} + 9b^2$ para completar un trinomio cuadrado perfecto es:

A. $\frac{ab}{3}$

B. 3ab

C. 2ab

D. ab

46. Sea B ={ x/x es divisor de 12}, B es conjunto:

A. finito

B. infinito

C. unitario

D. vacío

47. Dados A={1,2,3,4,5} B={2,4,6} la relación entre A y B es

A. $A \neq B$

B. $A = B$

C. $A \in B$

D. $A \subseteq B$

Tabla de respuestas

39	40	41	42	43	44	45	46	47
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

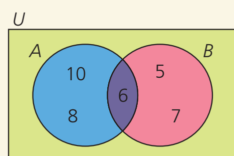
48. El conjunto que corresponde a (B−A)U(A−B) es:

A. {6}

B. {5, 6, 7}

C. {5, 7, 8, 10}

D. {10, 8, 7}



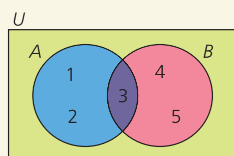
49. Dado el diagrama, el conjunto (B−A)' es:

A. {3, 4, 5}

B. {1, 2, 3}

C. {1, 2, 5}

D. {1, 3, 5}



50. Juan invierte 30 dólares para hacer x empanadas, si las vende a $1,50 por unidad, la fórmula de la ganancia es:

A. $\frac{5}{2}x - \frac{x}{30}$

B. $\frac{3}{2}x + \frac{30}{x}$

C. $\frac{30}{x} - \frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}x - \frac{30}{x}$

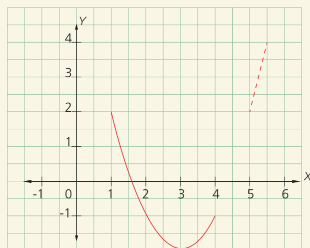
51. Los intervalos de continuidad de la función es:

A. (1, 4)

B. (1, 5)

C. (1, 6)

D. (2, 6)



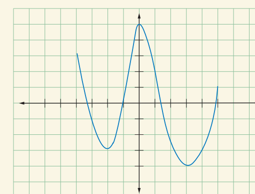
52. La coordenada en x de los puntos mínimos de la función son:

A. −4, 0

B. −2, 0

C. −2, 1,5

D. −2, 3



53. Función de proporcionalidad directa es:

A. $-2x$

B. $2 + 3x$

C. $2x^2 - 3$

D. $x - x^2$

54. La pendiente de la función $y = 2x - 3$ es:

A. 2x **B.** − 3

C. 2 **D.** 3

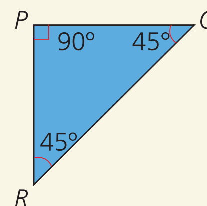
55. El triángulo por sus ángulos toma el nombre de:

A. isósceles

B. rectángulo

C. acutángulo

D. escaleno



56. El triángulo equilátero es también:

A. escaleno

B. rectángulo

C. acutángulo

D. obtusángulo

Tabla de respuestas

48	49	50	51	52	53	54	55	56
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D



57. El punto de intersección de las bisectrices es:

A. incentro

B. ortocentro

C. baricentro

D. circuncentro

58. El segmento perpendicular que se traza desde el vértice del triángulo hasta el lado opuesto se llama:

A. mediatriz **B.** mediana

C. bisectriz **D.** altura

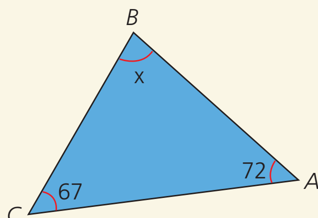
59. El valor del ángulo x es:

A. 39°

B. 41°

C. 49°

D. 51°



60. El triángulo que por la longitud de sus lados no puede construirse es:

A. a = 3, b = 4, c = 5

B. a = 2, b = 4, c = 8

C. a = 7, b = 5, c = 3

D. a = 6, b = 4, c = 9

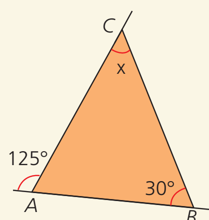
61. La medida del ángulo x es:

A. 65°

B. 75°

C. 85°

D. 95°



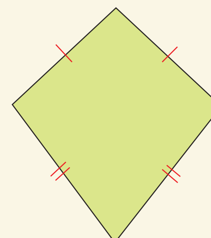
62. El cuadrilátero de la figura es un:

A. paralelogramo

B. trapecio

C. trapezoide

D. romboide



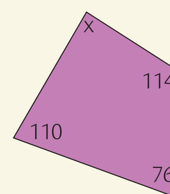
63. La medida del ángulo x es:

A. 60°

B. 70°

C. 80°

D. 90°



64. Del estudio estadístico sobre lo que opina la comunidad en relación a la migración. Se encuesta a quinientas personas de la zona rural y dos mil de la urbana. La muestra es:

A. 2 500 personas

B. la comunidad

C. la migración

D. personas de las zonas rural y urbana

65. La gráfica muestra el color favorito de las niñas de 4to de básica de una escuela. Si el color verde es el preferido de 10 niñas, el número de niñas encuestadas fue de:

A. 80

B. 100

C. 125

D. 150

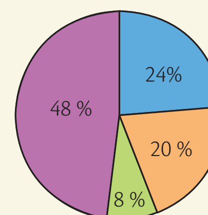


Tabla de respuestas

57	58	59	60	61	62	63	64
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

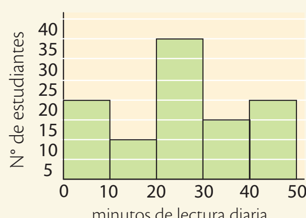
66. Según muestra el diagrama, el número de estudiantes que lee más de 30 minutos diarios es:

A. 80

B. 60

C. 90

D. 35



67. El suceso aleatorio es:

A. Obtener el área de un cuadrado de 5cm de lado

B. La raíz cuadrada de 400

C. Obtener un número al girar una ruleta.

D. Obtener el valor total del pasaje de 10 personas

68. Se consideran dos sucesos al lanzar un dado: A = "sale un número menor de 3" y B = "Se obtiene un número par". A∩B es:

A. {2} **B.** {1, 4, 6}

C. {1, 2} **D.** {1}

69. Los resultados posibles de un experimento se pueden enumerar con la técnica de:

A. tabla de frecuencia **C.** diagrama de árbol

B. diagrama de barras **D.** diagrama de pastel

70. Al lanzar tres monedas de dos colores diferentes, el espacio muestral es:

A. 4 **C.** 10

B. 6 **D.** 8

71. Sea A={2,4,6,8} los números de dos cifras que se pueden formar con este conjunto es:

A. 6 **C.** 10

B. 8 **D.** 12

72. Una bola se extrae aleatoriamente de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 bolas azules. La probabilidad de que sea roja es:

A. $\frac{6}{15}$ **C.** $\frac{5}{15}$

B. $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{10}{15}$

Tabla de respuestas

66	67	68	69	70	71	72
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D

Indicadores para la evaluación:

- Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales y reales.
- Aplica las operaciones con números reales en la resolución de problemas.
- Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números reales.
- Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.
- Aproxima decimales, en la simplificaión de expresiones numéricas.
- Emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños .
- Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos
- Expresa polinomios como la multiplicación de polinomios
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales
- Soluciona expresiones numéricas y algebraicas con productos notables
- Aplica las propiedades algebraicas de las operaciones y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas, atiende correctamente la jerarquía de las operaciones.
- Reconoce, calcula e identifica factores de expresiones algebraicas.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R
- Representa en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos.
- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.
- Determina el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología,
- Analiza las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones)
- Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal.
- Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados.
- Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares.
- Aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos.
- Explica los procesos de solución empleados en la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.
- Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.
- Utiliza información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.
- Calcula probabilidades de eventos aleatorios.



Construyendo la Cultura del Buen Vivir

¿Cómo administrar el tiempo?

El tiempo es abstracto, no se puede tocar, detener, ni cambiar. El tiempo **es una medida** que está presente en todo momento de la vida: cada acción que emprendas se puede medir según el tiempo invertido.

El manejo del tiempo depende de tu responsabilidad y de tu actitud para aprovecharlo al máximo. Por ello, administrar tu tiempo es otra valiosa habilidad de todo emprendedor.


SM Ediciones

1. Los seres humanos, desde la antigüedad, han inventado diversas categorías para medir, dividir o periodizar el tiempo. Organiza las siguientes categorías desde la que exprese menor lapso de tiempo hasta el mayor.

- Milenios
- Meses
- Minutos
- Siglos
- Años
- Segundos
- Décadas
- Días
- Horas
- Semanas


SM Ediciones


SM Ediciones

En plenaria

2. ¿Cómo distribuyes las horas del día? Escribe el número de horas que dedicas a cada actividad y luego responde las preguntas relacionadas.

Dormir y descansar	Cuidar el cuerpo	Divertirse	Estudiar y cumplir deberes

¿Cómo te cuidas, para poder dormir bien?	¿Qué actividades le hacen bien al cuerpo?	¿Cuáles actividades haces para divertirte?	¿Cuáles son tus responsabilidades o deberes?

3. Listar tus tareas pendientes y hacer un plan, disminuye el estrés y evita el olvido. Además, es una excelente forma de tener presente en qué inviertes el tiempo, para aprender a administrarlo de manera efectiva. Analiza y responde:

a. ¿Qué tareas o actividades desarrollarás la semana entrante?

....

b. ¿Qué día o días tienes destinado para estas actividades?

....

c. ¿Tienes claro a qué hora vas a ejecutar estas tareas?

....


SM Ediciones


SM Ediciones

4. Prioriza tus actividades identificando: ¿Qué es importante? y ¿Qué es urgente?

a. Lee el texto con atención:

> En el contexto del uso del tiempo, lo **urgente** significa atención inmediata. Por ejemplo contestar el teléfono, abrir la puerta porque el timbre no deja de sonar o atender al niño que no deja de llorar.
>
> De otra parte, lo **importante** tiene que ver con resultados, con el logro de objetivos o metas. Por ejemplo, papá quiere mejorar su estado de salud, para esto debe hacer ejercicio, alimentarse sanamente y realizar chequeos médicos. Estas tareas de papá son importantes y exigen compromiso y disciplina si quiere lograr un resultado optimo y efectivo.

- Infiere lo importante y lo urgente para el caso de un joven cuya meta, además de ser excelente estudiante, es llegar a ser un excelente futbolista.

b. ¿Qué tareas son importantes para lograr esta meta?

....

c. ¿Qué tareas son urgentes en la vida de este joven, pero no le aportan al logro de su meta?

....

- Cuando el joven lleva a cabo "lo importante", le apunta a lograr su meta. Esto exige de él, disciplina y compromiso, así como hacer ciertos sacrificios diarios. Pero al final, alcanzará su ideal y se convertirá en un gran futbolista.

5. Dar buen uso al tiempo exige que tengamos objetivos y propósitos claros en la vida y disciplina con las tareas que son importantes para lograrlo.

a. ¿Cuál es uno de tus grandes sueños o metas?	**b.** Para lograrlo ¿qué actividades importantes deben ocupar tu tiempo?	**c.** ¿Qué actividades urgentes pueden desviar el logro de tu sueño?

6. ¿Qué dice la tradición popular del uso del tiempo? Comparte en grupo el significado de cada frase.

- Tiempo ni hora no se atan con soga.
- Un hoy vale por dos mañanas.
- El tiempo perdido, los santos lo lloran.
- Cada cosa tiene su tiempo.
- El día es excesivamente largo para quien no lo aprecia.
- No dejes para mañana lo que puedas hacer hoy.


SM Ediciones

7. Existen enemigos del buen manejo del tiempo, pueden ser llamadas telefónicas no planificadas, visitas inesperadas, reuniones imprevistas, o tener que asumir tareas de otros. En grupo, organiza una representación teatral, sobre los enemigos del buen uso del tiempo.

8. ¿Consideras que una persona emprendedora debe tener disciplina y compromiso con el manejo del tiempo? ¿Por qué?






sm



Glosario

A

Altura de un prisma. Segmento que une las bases de un prisma y es perpendicular a estas.

Altura de una pirámide. Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

Ángulos alternos externos. Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos. Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos que tienen un vértice común, y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

Ángulos suplementarios. Ángulos cuyas medidas suman 180º.

Arista. Segmento en el que se intersectan dos caras de un poliedro.

B

Baricentro. Punto de corte de las medianas de un triángulo.

Bisectriz. Semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

C

Circuncentro. Punto donde se intersecan las mediatrices de un triángulo.

Coeficiente. Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto. Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

D

Decimal. Forma de escribir los números racionales e irracionales. Consta de una parte entera y una decimal, separadas por una coma.

Decimal exacto. Número cuya parte decimal es finita.

Decimal periódico. Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad. Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

División sintética. Método abreviado para hallar el cociente y el residuo de una división de polinomios, cuando un divisor es un binomio de la forma $x - a$.

Dominio. Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación. Igualdad entre expresiones algebraicas, que solo es cierta para algún o algunos valores de las variables.

Ecuaciones equivalentes. Ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Ecuación lineal. Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales, x representa la incógnita y $a \neq 0$.

Esfera. Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Espacio muestral. Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento. Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Eventos dependientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

Eventos independientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

Experimento aleatorio. Experimento del cual no se puede prever el resultado.

Expresión algebraica. Toda expresión compuesta por términos separados por los singos de las operaciones fundamentales.

Expresión algebraica irracional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Factorización. Expresión de un polinomio como un producto de factores primos.

Fórmula. Ecuación que muestra una relación entre dos o más variables.

Frecuencia absoluta. Es el número o cantidad de veces en que se produce un resultado o un experimento estadístico.

Frecuencia relativa. Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

Función. Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto *A* un único elemento de un conjunto *B*.

Función afín. Función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Función lineal. Función de la forma y = mx, donde m es una constante.

G

Grado de un monomio. Exponente de la variable, si un monomio tiene una sola variable, o la suma de los exponentes de las variables cuando el monomio tiene más de una variable.

Grado de un polinomio. Es el mayor de los exponentes de las partes literales de los términos que componen un polinomio.

I

Incentro. Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Incógnita. Cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación.

Inecuación. Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

L

Línea poligonal. Unión de varios segmentos que no tienen más elementos comunes que sus extremos.

Logaritmo. Se define como logaritmo en base *a* de un número *b*, a otro número *c* tal que a elevado al exponente *c* da como resultado el número *a*.

$$Log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

M

Máximo común divisor (m.c.d.). Mayor número que divide exactamente a dos o más números.

Media aritmética. Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana (estadística). Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Mediana (geometría). Segmento que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Mediatriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un segmento.

Medidas de tendencia central. Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Mínimo común múltiplo (m.c.m.). Menor múltiplo compartido por dos o más números.

Moda. Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

Monomio. Expresión algebraica en la que se operan solo productos y potencias. Por lo tanto, está compuesto por un solo término.

Monomios semejantes. Monomios que tienen la misma parte literal y, por lo tanto, el mismo grado.

N

Notación científica. Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Número de oro (áureo). Es el número que representa la perfecta armonía entre dos dimensiones.

Número irracional. Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

Número racional. Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

Números reales. Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

O

Ortocentro. Punto de concurrencia de las alturas de un triángulo.

Ortoedro. Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

P

Paralelepípedo. Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

Parte literal de un término. Es la parte de un término conformada por las variables con sus respectivos exponentes.de cero, denominada pendiente.

Pendiente. En la recta dada por la ecuación $y = mx + b$, el valor m corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente. Está relacionada con la inclinación de la recta.

Polinomio. Expresión algebraica que consta de uno o más términos.

Polinomio irreductible. Polinomio que no se puede expresar como el producto de polinomios de menor grado.

R

Recíproco de un número. El recíproco de un número real a es el número real $\frac{1}{a}$, tal que el producto con a da como resultado 1.

Rectas paralelas. Líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares. Líneas rectas en las que el producto de sus pendientes es igual a -1. Forman cuatro ángulos rectos en el punto donde se cortan.

Rectas secantes. Líneas rectas que se cortan en un punto único.

T

Teorema. Proposición que afirma una verdad demostrable.

Teorema de Pitágoras. Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Término. Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo. Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

Triángulo equilátero. Triángulo que tiene todos los lados iguales.

Triángulo escaleno. Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

Triángulo isósceles. Triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulos congruentes. Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor absoluto. El valor absoluto de un número real c se simboliza $|c|$ y se define como:

$$|c| = \begin{cases} c, \text{ si } c > 0 \\ -c, \text{ si } c < 0 \end{cases}$$

Valor numérico de un monomio. Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

Variable algebraica. Cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

Variable dependiente. Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente. Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá, 1999.
- Alem, J.P. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Editorial Síntesis, Madrid, 1995.
- Andonegui, M. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, España, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Editorial Síntesis, Madrid, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje* 5. Editorial Síntesis, España, 1997.
- Clemens *et al*. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.
- De Prada V. María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, España, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Pearson-Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.
- James Stewart, Cálculo de una variable, Cengage Learning™, 2008.
- Jouette, André. *El secreto de los números*. Intermedio Editores, Bogotá, 2002.
- Küchemann, D. The meaning children give to the letters in generalised arithmetic. En: *Cognitive Development Research in Sci. and Math*, 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.
- Leithold, L. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.
- Lehmann, Charles H. Noriega editores, México 1989.
- Mason, J. Burton, L. Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. MEC/ Labor, 1992.
- Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Editorial Mir, Moscú, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. McGraw-Hill, México, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes; Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, México, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill, México, 1975.
- Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Ed. Limusa, México, 1988.
- Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. McGraw -Hill,Colombia, 2000.

Webgrafía

- Álvarez, C. (2005, 23 de febrero). Entrevista: Klaus-Jürgen Bathe. El País. Recuperado de: http://elpais.com/diario/2005/02/23/futuro/1109113202_850215.html
- Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.genmagic.net/
- Cómo mentir con estadísticas. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm_financiera/De%20La%20Fuente/Como_mentir_con_estadisticas.pdf
- Diccionario de la Real Academia Española. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.rae.es/
- Disfruta las matemáticas. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/
- Funciones y servicios públicos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en : http://revista.consumer.es/web/es/20070501/practico/consejo_del_mes/71515.php#rc-cabecera-container
- Geometría recreativa de Yacob Perelman. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf
- Networking and Emerging Optimization (2015). RSA. Madrid, España: Disponible en: http://neo.lcc.uma.es/evirtual/cdd/tutorial/presentacion/rsa.html
- ¿Qué es una bolsa de valores? [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://dinero.about.com/od/Ahorrando/a/que-Es-Una-Bolsa-De-Valores.htm

PLAN NACIONAL
DEL LIBRO Y LA LECTURA
José de la Cuadra



¡LEER ENCIENDE TU IMAGINACIÓN!

Visita nuestra página y accede a un mundo de contenidos
www.planlibroylectura.gob.ec

MINISTERIO DE **EDUCACIÓN** • MINISTERIO DE **CULTURA Y PATRIMONIO**

Me gustan las matemáticas

José Antonio Hervás

Como ninguna otra ciencia
me gustan las matemáticas
porque agotan mi paciencia
con cuestiones enigmáticas.

Confieso, sin estridencias,
que me resultan simpáticas
todas las circunferencias
y demás curvas cuadráticas.

Yo comprendo que la gente
piense que soy diferente
porque me gusta soñar

con las series divergentes
los números trascendentes
y la función modular.

Tomado de https://goo.gl/rN4NfX (01/03/2018)

José Antonio Hervás (1974). Poeta y fotógrafo español.

Así soñé yo la verdad

Gabriel Celaya

Kepler miró llorando los cinco poliedros
encajados uno en otro, sistemáticos, perfectos,
en orden musical hasta la gran esfera.

Amó al dodecaedro, lloró al icosaedro
por sus inconsecuencias y sus complicaciones
adorables y raras, pero, ¡ay!, tan necesarias,
pues no cabe idear más sólidos perfectos
que los cinco sabidos, cuando hay tres dimensiones.

Pensó, mirando el cielo matemático, lejos,
que quizá le faltara una lágrima al miedo.

La lloró cristalina: depositó el silencio,
y aquel metapoliedro, geometría del sueño,
no pensable y a un tiempo normalmente correcto,
restableció sin ruido la paz del gran sistema.

No cabía, es sabido, según lo que decían,
más orden que el dictado. Mas él soñó: pensaba.

Eran más que razones: las razones ardían.
Estaba equivocado, mas los astros giraban.

Su sistema era solo, según lo presentido,
el orden no pensado de un mundo enloquecido,
y él buscaba el defecto del bello teorema.

Lo claro coincidía de hecho con el espanto
y en la nada, la nada le besaba a lo exacto.

Tomado de https://goo.gl/xicu2M (04/02/2018)

Gabriel Celaya (1911-1991). Poeta español de la posguerra, interesado en la literatura comprometida. En 1986 ganó el Premio Nacional de las Letras Españolas, otorgado por el Ministerio de Cultura de su país.

Cuando todo quería poner en práctica

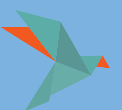
Gabriela Noriega

Cuando todo quería poner en práctica
siempre debía recurrir a la matemática.
Quería solamente dedicarme al dibujo, a la pintura,
pero debía sacar proporciones y medir la altura.

Quería también dedicarme a cantar,
pero debía medir el tiempo entre el canto y la música por tocar.
Creí encontrar en el baile una solución,
pero si no contaba los pasos era mi perdición.

A la composición de poesías me quise dedicar,
pero debía medir los versos para un gran poema lograr.
Geografía, historia, música, todas con la matemática se relacionaban
y en mi mente números y números se cruzaban.

Para olvidarme caminé y caminé
y al mirar un letrero que decía km 5 encontré.
Miré mi reloj y una hora había demorado
y en mi mente una pregunta había pasado.



Si en una hora 5 km había caminado,
en 4 horas ¿cuántos km habría avanzado?
Dije entonces 1 es 4 como 5 es X, sin pensar
que con una regla de tres simple me había yo de encontrar.

Multipliqué 5 por 4 y 20 me dio,
despejé la X y el 1 al dividiendo pasó,
la X igual a 20 me quedó,
y en 4 horas 20 km habría de recorrer yo.

Luego pensando me di cuenta que
con la matemática me había de nuevo encontrado,
y me di cuenta que ni siquiera caminar
podía hacerlo, sin ella a mi lado.

Fue en ese momento cuando su importancia descubrí
y aunque a veces me cansaba, las tablas aprendí.
Pero me di cuenta que aunque de ella escaparme quiera,
hasta en las cosas más sencillas la matemática espera.

Tomado de https://goo.gl/C5vjBf (01/03/2018)
Gabriela Noriega, Divulgadora de la matemática en composiciones poéticas.

Los dones del Cero

Ana Awilda Silva

Cuentan de un Cero que pensaba que no valía nada; pero un día decidió salir en busca de amigos que le dieran valor. Fue donde el Uno y con un tono de voz muy triste le dijo:
—Uno, tú vales mucho, pero yo no valgo nada. Fíjate, nací en Babilonia, y los árabes decían que soy una cifra vacía, que vengo de la nada y que yo pertenecía al infinito. A veces pienso que soy un fantasma, pues dicen que significo la ausencia por medio de la presencia, o sea, que existo y no existo. Y el uno le dijo:
—¿Cómo vas a decir eso? Tú vales más de lo que te imaginas. Mira, si te ubicas a la izquierda, podrá ser que no valgas nada, pero si te ubicas a la derecha, juntos tendremos mucho valor. ¡Ya verás!

Se fueron por el camino y se encontraron con otro amigo y este les dijo:
—¡Hola, señor Diez!
¡El Cero se sorprendió…! Y el Uno le dijo:
—Lo ves, yo te lo dije.

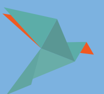
El Cero se sintió tan importante que se le ocurrió la idea de que ambos podrían casarse y tener muchos ceritos. Se reprodujeron y formaron el cien (100) y así, sucesivamente, año tras año continuaron añadiendo ceros hasta formar mil (1 000), diez mil (10 000), cien mil (100 000), hasta un millón (1 000 000).
—¿Te das cuenta? Eres el pobre que le das sentido a la vida de un rico, pues él necesita de ti para llegar a un millón, a un billón y a un trillón. Y el cero le dijo al uno:
—Oye… como se están añadiendo tantos ceros, podemos representarlos así: Fíjate, cuando nos unimos formamos el diez (10). Como se añadió un cero, entonces el exponente es uno, o sea: 101. Luego se añadieron dos ceros y el exponente es dos, así que 100 = 10; y así sucesivamente, el exponente representa la cantidad de ceros.
—¿Cuánto representa 10 y 104?
—Pues bien, 10 = 1 000, y 104 = 10 000.
—¡Mira si somos importantes! Actualmente las computadoras necesitan de nosotros para poder funcionar, pues ellas operan con el sistema binario de uno y cero: 00101001. Nunca subestimes las capacidades que posees. Todos tenemos nuestro valor. ¿Viste cuánto vales?
—Uno, si no fuera por ti, yo no sería nadie.

Tomado de https://goo.gl/GLtWw3 (01/03/2018)

Ana Awilda Silva. Escritora de cuentos y profesora de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de Ponce, e integrante del Centro de Recursos para Matemáticas y Ciencias, CREMC.

El número Pi
Wislawa Szymborska

Digno de admiración es el número Pi,
tres coma catorce. Todas sus siguientes cifras también son iniciales,
quince noventa y dos, porque nunca termina.



No deja abarcar, sesenta y cinco treinta y cinco, con la mirada,
ochenta y nueve, con los cálculos,
sesenta y nueve, con la imaginación,
y ni siquiera, treinta y dos treinta y ocho, con una broma, o sea, comparación,
cuarenta y seis, con nada,
veintiséis cuarenta y tres, en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra después de muchos metros se acaba.
Lo mismo hacen, aunque un poco después, las serpientes de las fábulas.
La comparsa de cifras que forma el número Pi
no se detiene en el borde de la hoja.
Es capaz de continuar por la mesa, el aire,
la pared, la hoja de un árbol, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
a través de toda esa hinchazón e inconmensurabilidad celestiales.
Oh, qué corto, francamente rabicorto es el cometa.
¡En cualquier espacio se curva el débil rayo de una estrella!
Y aquí, dos treinta y uno cincuenta y tres diecinueve,
mi número de teléfono, el número de tus zapatos,
el año mil novecientos sesenta y tres, sexto piso,
el número de habitantes, sesenta y cinco céntimos,
centímetros de cadera, dos dedos, una charada y mensaje cifrado,
en la cual ruiseñor que vas a Francia
y se ruega mantener la calma.
Y también pasarán la tierra y el cielo,
pero no el número Pi, de eso ni hablar,
seguirá sin cesar con un cinco en bastante buen estado,
y un ocho, pero nunca uno cualquiera,
y un siete que nunca será el último,
y metiéndole prisa, eso sí, metiéndole prisa a la perezosa eternidad
para que continúe.

Tomado de https://goo.gl/2t9TVC (02/03/2018)

Wislawa Szymborska (1923-2012). Poeta, ensayista y traductora polaca, ganadora del Premio Nobel de Literatura en 1996. Entre sus obras destacan *Busco las palabras, Por eso vivimos, Preguntas planteadas a una misma.*

Los modelos matemáticos de Óscar Bruno

Adrián Paenza

Óscar Bruno es doctor en matemática. Trabaja en el California Institute of Technology, más conocido como CalTech. Se dedica a la investigación en áreas de matemática aplicada, ecuaciones en derivadas parciales y ciencia computacional. En su trabajo se ocupa de predecir las características de diseños de ingeniería, usando métodos matemáticos y programas de computadoras. Hace un par de años le pedí que me diera algunas referencias sobre lo que hacía. Y me escribió estas líneas que ahora transcribo, con su autorización, claro.

—¿Cómo se usan los modelos matemáticos para mejorar la calidad de un objeto antes de construirlo?

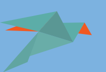
Las ventajas ofrecidas por tales métodos son muchas y claras. Por un lado, es mucho más sencillo y menos costoso simular un diseño que construirlo. Por el otro, un modelo matemático puede revelar información que es muy difícil o imposible de adquirir experimentalmente. Por supuesto, la validez de estos modelos debe ser verificada a través de comparaciones con experimentos; pero, una vez que un modelo está verificado, se puede tener un alto grado de confiabilidad en sus predicciones.

Yo me dedico a generar y verificar modelos matemáticos para problemas de ciencia de materiales. Y también me ocupo de diseñar métodos numéricos para una variedad de áreas de la ciencia. Estos métodos numéricos permiten implementar los modelos matemáticos en computadoras. Últimamente he estado trabajando en una variedad de problemas:

1. Producción de radares
2. Producción de diamante a partir de grafito por medio de ondas de choque
3. Diseño de un microscopio basado en rayos láser, en conjunto con un grupo de biólogos y de físicos
4. Predicción financiera
5. Diseño de materiales compuestos de goma y pequeñísimas partículas de hierro, llamados sólidos magnetoreológicos (cuya elasticidad y forma pueden ser alterados a través de la aplicación de un campo magnético)

No quiero dejar de mencionar que los progresos en estos tipos de problemas de predicción pueden llevar a:

1. Nuevos conocimientos científicos
2. Mejoras o abaratamientos en procesos de producción



3. Diseños de nuevos artefactos. Por ejemplo, el microscopio que mencioné antes permitirá la observación de la actividad de células vivas, sus intercambios de fluidos, interacciones con microorganismos, etcétera.

Los materiales compuestos basados en goma, por otro lado, son buscados para mejorar los mecanismos de reducción de vibraciones en automóviles: dependiendo del tipo de camino, es preferible combinar gomas con distintos grados de dureza. Usando campos magnéticos y materiales compuestos basados en goma, se puede variar el tipo de dureza y obtener una reducción sensible de vibraciones que son más efectivas para todo tipo de caminos. El diseño del compuesto más conveniente (qué tipos de partículas utilizar, en qué cantidad, qué tipo de goma es más ventajoso) se facilita enormemente gracias a los métodos numéricos. Ciertamente, en vez de producir un prototipo con cada combinación posible de materiales básicos, se utiliza un programa de computadora por medio del cual, para determinar las características de un cierto compuesto, solo es necesario especificar, cuando la computadora lo requiere, una serie de números que caracterizan las propiedades básicas de los componentes utilizados.

Hasta aquí las reflexiones de Óscar. Ahora, agrego yo: muchas veces, como matemáticos, recibimos la pregunta: "¿Para qué sirve lo que usted hace? ¿Cómo se usa? ¿Gana plata con eso?" Cuando se trata de matemáticos que dedican su vida a la producción de ciencia con aplicaciones más evidentes o más directas, las respuestas, como las de Bruno, suelen ser más claras o más contundentes. En cambio, cuando esas respuestas provienen de científicos que dedican su vida a la investigación básica o a la vida académica, no suelen convencer al interlocutor. El ciudadano común se siente apabullado y calla, pero no está seguro de que le hayan contestado lo que preguntó. No entiende.

Uno de los propósitos de este libro es acercar a las partes. Mostrar la belleza que contiene pensar un problema cuya respuesta uno ignora. Sobre todo eso: pensar, imaginar caminos, disfrutar de la duda. Y, en todo caso, aprender a coexistir con el desconocimiento, pero siempre con la idea de derrotarlo, de descubrir el velo que esconde la verdad.

Tomado de https://goo.gl/xyX7eq (20/02/2018)

Adrián Paenza (1949). Periodista, matemático y profesor argentino especializado en la divulgación matemática.

A la línea

Rafael Alberti

A ti, contorno de la gracia humana,
recta, curva, bailable geometría,
delirante en la luz, caligrafía
que diluye la niebla más liviana.

A ti, sumisa cuanto más tirana,
misteriosa de flor y astronomía,
imprescindible al sueño y la poesía,
urgente al curso que tu ley dimana.

A ti, bella expresión de lo distinto,
complejidad, araña, laberinto
donde se mueve presa la figura.

El infinito azul es tu palacio.
Te canta el punto ardiendo en el espacio
A ti, andamio y sostén de la Pintura.

Tomado de https://goo.gl/pB819x (29/03/2018)

Rafael Alberti (1902-1999). Escritor español perteneciente a la Generación del 27. Autor de: *Marionero en Tierra*, *Un fantasma recorre Europa*, *Sonríe China* y *Canciones para Altair*.

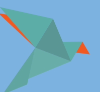
Rima para recordar el número PI

Manuel Golmayo

Soy y seré a todos definible, (3,14159)
mi nombre tengo que daros, (26535)
cociente diametral siempre inmedible (8979)
soy de los redondos aros. (32384)

Tomado de https://goo.gl/sPoz9U (29/03/2018)

Manuel Golmayo (1883-1973). Escritor y ajedrecista español. Ha publicado *Bridge contratado*, *Temas de ajedrez*, entre otras obras.



Los números

Martín Ceballos

Estos símbolos secretos
nos proponen sensaciones,
que en frías definiciones,
nos proyectan a lo eterno.

No sabemos cuándo empiezan,
ni tampoco dónde acaban,
pero, en mágico espejismo,
el cero se hace concreto…
Y entonces desde la nada
empezamos a contar.

¡De pronto!, las unidades
se disfrazan de cifras
y en carnaval de ecuaciones
nos esconden sus verdades.

Entonces nuestros cerebros
comienzan a trabajar,
con ingenuidad y afán
intentando conseguir
el resultado perfecto.

Y en esa extraña experiencia
nos ha hechizado el misterio
de atrapar las dimensiones
y alcanzar el infinito, en cósmicas
relaciones de armonía universal.

Tomado de https://goo.gl/rN4NfX (23/03/2018)

Martín Ceballos. Divulgador de conocimientos matemáticos en obras literarias.

En clase de matemática

Alexis Oviedo

El profesor habla de valor absoluto, como si hubiera valores me pregunto… Él habla de la función, yo pienso en el más allá de la defunción. El profesor grafica las raíces, como si no las hubiéramos ya perdido, reflexiono.

Diserta sobre las desigualdades: ¿Acaso algo es igual a otro en este espacio? Explica los cuadrados. ¿Para qué reiterar?, si poco a poco, cada día, los seres humanos nos parecemos más a ellos.

Ha comenzado a definir los intervalos y esto sí me llega profundamente: De 0 a +- ∞ es el espacio en que no estás conmigo. Caminé de 0 a -1 para encontrarte, pero tú encontraste un atajo en cierta parábola, y por la recta real, te alejaste hasta un punto incognoscible. Luego volviste y pude verte de nuevo jugar con los números positivos. Descendí en una recta de pendiente -1/4 para poder alcanzarte, pero resbalé en la misma y hoy estoy aquí sin ti: tendiendo a cero y a ∞.

Alexis Oviedo (1970). Escritor ecuatoriano, autor de varios textos sobre educación, lenguaje, literatura y matemáticas. Su novela *Arcanos Mayores* se publicó en 2017.

Poesía matemática

Fabiana Porracin

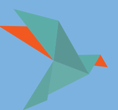
Me gusta lo que suma, lo que multiplica...
No me gusta lo que resta, y termina dividiendo un
conjunto en fracciones...

Me gusta de los conjuntos el que incluye,
el que es directamente proporcional
y también me gusta reconocer a los que son diametralmente opuestos.

De las figuras geométricas no me gusta el círculo
cuadrado, que viciosamente encierra
o,
que aun abierto potencia
lo que se va por la tangente.

En forma inversamente proporcional, del círculo me gusta que es redondo,
y por eso puede echar a rodar...

Me gusta lo paradojal de lo plano que es plano,
y se deriva de esto que no por
superficial deja de ser sustento...
Me gusta la intersección de la diferencia.



No me gusta haber visto un número irracional de veces
la no discriminación de lo mutuamente excluyente,
qué distinto a la espiral, que dialéctica, integra,
incluye, se abre y expande
interminablemente...

De la infinita línea de puntos me gusta paralelamente
que se parece a la más larga caminata,
la que comienza con el primer paso,
y me gusta que en el curso de esa larga caminata se
puede poner algo entre paréntesis...
O elegir un curso que se bifurque alternativamente...
Por eso también la precisión de *y* en la puntuación me agrada
desproporcionadamente.

Me gusta que el saldo sea positivo....
Teniendo igual en mente que
el final de cuentas podría
resultar negativo,
y así, aun así, su función sería la de
incrementar algún coeficiente.

Tomado de https://goo.gl/rN4NfX (23/03/2018)

Fabiana Porracin. Escritora, psicóloga y antropóloga argentina.

Teorema de Pitágoras

Jorge Eliécer Guevara Silva

Comienzo por explicar lo que es un teorema,
concepto fundamental, común en cualquier sistema.
Se dice que es propiedad o que es proposición,
solo es una verdad que exige demostración.

Pitágoras era un griego, que antes de Cristo vivió,
las cifras fueron su apego, por años las estudió.
Este genio del guarismo aportó mucho a la ciencia,
ocupó el protagonismo, le dio frutos su eficiencia.
Una propiedad famosa, que lleva su mismo nombre,
la idea más ingeniosa que hizo inmortal a este hombre.
En los triángulos rectángulos se aplica este teorema,
no se involucran los ángulos, de los lados trata el tema.

Es importante aprenderlo, que en la mente esté presente,
aplicarlo y entenderlo, su enunciado es el siguiente:
la hipotenusa al cuadrado, nos divulga este decreto,
con la suma se ha igualado del cuadrado de los catetos.

Con él podemos hallar la hipotenusa y los lados,
dos datos nos pueden dar y el tercero es calculado.
Es grande la aplicación del grandioso teorema,
en más de una situación para resolver problemas.

Tomado de https://goo.gl/n2QQQX (23/03/2018)

Jorge Eliécer Guevara Silva (1961). Escritor, docente, matemático y físico colombiano. Ha publicado tres libros de poemas: *Reflexiones*, *Versos en la clase*, y *Estampas de mi pensamiento*.

No temas

Ayekimatincoyot Nicoyal Cuauhnacaztl

No temas acercarte a las Matemáticas
ellas son ciertas
y no mienten.

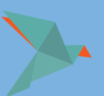
Es cierto que son rigurosas
como la misma Muerte,
pero también es cierto
que son hermosas
como la Música.

Son tan ciertas
que Dios las usó desde siempre
para crearlo Todo.

No temas,
ellas son ciertas
y no mienten.

Tomado de https://goo.gl/37cdNq (23/03/2018)

Ayekimatincoyot Nicoyal Cuauhnacaztl. Divulgador de conocimientos matemáticos en obras literarias.



¡LEER ENCIENDE TU IMAGINACIÓN!

Potencias

Danny Perich Campana

Propiedad, teorema, corolario
en todos los idiomas es igual,
lo mismo ocurre con las potencias
porque es un lenguaje universal.
Para multiplicar potencias de igual base
conservar la base y los exponentes sumar,
así a elevado a cinco por a elevado a siete,
a elevado a doce te resultará.
Donde debes tener especial atención,
pues los signos te pueden complicar,
es en la división de potencias
donde los exponentes se deben restar.
Por lo tanto si tienes a elevado a siete
dividido por a elevado a menos tres
al restar y multiplicar menos por menos
obtendrás a elevado a diez.
Las potencias de exponente cero valen uno,
pero la base cero hay que descartar.
Cero elevado a cero no está definido,
si estás atento no te equivocarás.
Si una potencia tiene exponente negativo
para resolver la base debes transformar,
la inviertes y por arte de magia
el exponente positivo quedará.
O sea, dos elevado a menos tres:
comienza por la base invertir,
así el dos pasa a ser un medio,
y elevado a tres un octavo debe salir.
Una potencia a potencia es muy fácil
basta con los exponentes multiplicar,
sean estos 2, 3 o quinientos
el procedimiento siempre es igual.
En todas las operaciones con potencias
como regla no debes olvidar
que sea base o sea exponente
lo que es igual siempre debes conservar.

Tomado de https://goo.gl/51NrGk (19/03/2018)

Danny Perich Campana. Profesor, matemático, escritor y compositor chileno, reconocido por sus aportes a la educación y al desarrollo tecnológico.

Raíz de tres

Tamara Velásquez

Matemáticamente puedo decir que del 100 % de ti,
me gusta el entero de tu corazón.

Sin ti me siento como una raíz de tres,
pero ¿cómo se siente una raíz de tres?
Inexacta.
Tan cerca de una raíz perfecta,
pero tan inalcanzable como todos los números
que existen entre 3 y 4: infinitos.

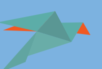
Infinitos son los momentos que pienso en ti,
pero, ¿qué hay de mí sin ti?
Tú eres mi complemento y suplemento a la vez.
Así como cuando se juntan los catetos
para formar un ángulo de 90°: perfecto.

Juntos seríamos el cuadrado perfecto.
No sé cómo te llegué a querer tanto,
si no te llegué a conocer al 100 %.

Eres una incógnita,
la x en una ecuación imposible de igualar.
Pero, a la vez, éramos tan iguales,
como dos puntos reflejados en el plano cartesiano.
Iguales, pero con distintos signos.
Sin embargo, polos opuestos se atraen, ¿no?

Qué más da,
si finalmente solo somos dos rectas paralelas
que jamás se juntarán.

Tomado de https://goo.gl/UvJth7 (12/03/2018)
Tamara Velásquez. Poeta y escritora chilena.



Ayer por la tarde

Jairo Aníbal Niño

Ayer por la tarde,
como te lo había prometido,
jugué el mejor partido
de fútbol de mi vida.
En el primer tiempo
hice un gol a los quince minutos.
A los treinta y siete
hice otro.

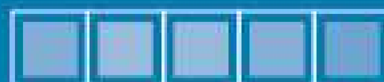
En el segundo tiempo,
a los siete minutos,
José Villegas,
el que cuando canta dice
que le nacen mariposas
en el pensamiento,
fusiló a nuestro arquero
con un taponazo
sobre el ángulo izquierdo.

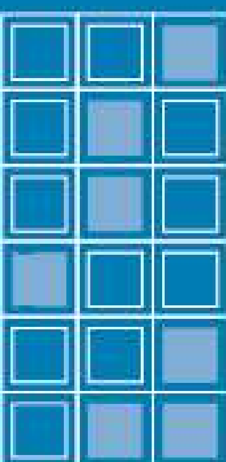
A los diecinueve minutos
y quince segundos,
David, el que quiere ser aviador,
empató el partido
con un lindo gol de cabeza.
A los cuarenta y cuatro minutos,
al estilo Castañito,
hice el gol más lindo del mundo.

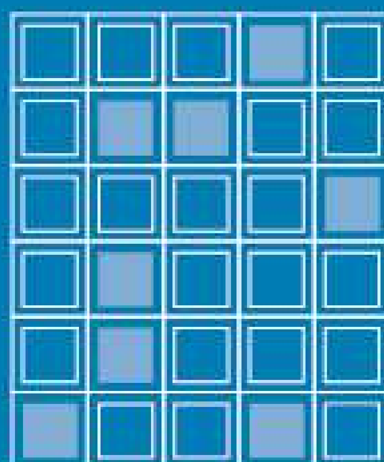
Mi equipo ganó
por el marcador
de dos a tres,
pero yo sentí que había perdido
porque tú no viniste.
Me derrotaron los goles que
me hizo tu ausencia.

Tomado de https://bit.ly/2GBXOIZ (26/03/2018)

Jairo Aníbal Niño (1941-2010). Escritor colombiano. Gran parte de su obra fue dedicada a la literatura infantil y juvenil.







MINISTERIO
DE **EDUCACIÓN**





EL
GOBIERNO
DE TODOS

 @MinisterioEducacionEcuador  @Educacion_EC  /MinEducacionEcuador  /Educacionecuador

www.educacion.gob.ec

Información: 1800 EDUCACIÓN (338222) o **info@educacion.gob.ec**